

УДК 621.3.011.7

Шифр специальности ВАК: 2.4.1

Ю.А. Бурцев

Развитие методов расчета переходных процессов на основе матричной экспоненты для цепей с нелинейными резисторами

Актуальность. Разработка новых методов расчета переходных процессов в электрических цепях актуальна, несмотря на наличие множества известных методов и компьютерных программ. Причина в том, что практические задачи накладывают набор требований, которым существующие методы иногда не вполне удовлетворяют, поэтому дают большую погрешность или даже качественно неверные результаты либо требуют большого времени счета, оказываются очень сложными или совсем неприменимыми. Методы должны быть: пригодными для жестких, колебательных и жестко-колебательных цепей с большим разбросом параметров; высокоточными (порядок точности не менее 3); экономичными по вычислениям; *L*-устойчивыми (это устраняет ложные колебания и ограничения на шаг интегрирования); приспособленными для расчета нелинейных цепей и цепей с частыми коммутациями; простыми и удобными, не требовать настройки, предварительных расчетов и оценок. **Цель исследования.** Расширить ранее предложенное автором семейство методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях на цепи с нелинейными резисторами. **Методы.** В основе представленной работы лежит новое семейство высокоточных неявных численных методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Новые методы основаны на разложении аппроксимации Паде матричной экспоненты на простейшие дроби и удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям. Они очень хорошо приспособлены к структуре систем уравнений электрических цепей, значительно проще других высокоточных методов. Для решения нелинейных уравнений используются метод простой итерации и интерполяция тока внутри интервала интегрирования. **Научная новизна.** Новые эффективные методы расчета переходных процессов в линейных цепях удалось приспособить к расчету цепей с нелинейными резисторами. Предложены оригинальная, повышенной точности линеаризация вольт-амперной характеристики резистора и способ расчета токов внутри интервала интегрирования. Все результаты получены лично автором. **Результаты.** Новые методы позволяют рассчитывать произвольные режимы цепей, содержащих нелинейные резисторы, с погрешностью на несколько порядков меньшей, чем у одного из наиболее часто применяемых для этого метода трапеций. **Практическая значимость.** Расчеты динамических процессов в цепях с нелинейными элементами имеют очень много практических приложений. В частности, они нужны для проектирования силовых полупроводниковых инверторов, цифровой техники, систем электроснабжения, электронных и радиотехнических устройств и компонентов. **Ключевые слова:** электрические цепи, нелинейные резисторы, переходные процессы, *L*-устойчивые методы, высокоточные методы, матричная экспонента, аппроксимация Паде. **DOI:** 10.21293/1818-0442-2026-29-2-189-198

Введение

Основные задачи расчета электрических цепей появились и были так или иначе решены десятки лет назад. Однако, во-первых, многие методы расчета и программы показывают большие различия расчетов с реальностью [1–3] и имеют другие перечисленные ниже недостатки. Во-вторых, существующие методы и программы не могут покрыть все задачи проектирования новой техники. В настоящей статье ранее разработанные автором методы для линейных цепей расширены на цепи с нелинейными резисторами. При этом используется оригинальная линеаризация вольт-амперной характеристики (ВАХ) резистора, отличающаяся повышенной точностью.

В исследованиях на тему, представленную в статье, в большинстве случаев используют термин «переходные процессы», что отражено и в названии статьи. Однако полезно иметь в виду, что на самом деле решается более широкая задача, так как если в цепи действуют периодические источники ЭДС и тока и к тому же заданы специальные начальные условия либо переходной процесс в классическом его понимании закончился, мы получим расчет периодического режима электрической цепи, как это далее сделано в простейших тестовых задачах.

Отметим, что для широкополосной по частотному спектру нелинейной цепи расчет периодического процесса часто бывает трудно получить частотными методами. Если в цепи действуют непериодические источники энергии или имеют место автоколебания, то, применяя методы, формально предназначенные для расчета переходных процессов, можно рассчитывать непериодические и автоколебательные процессы. Таким образом, по существу в статье идет речь о расчете произвольных режимов электрических цепей. Сделав такую оговорку и следуя традиции, далее все же будем применять термин «переходные процессы», понимая его в широком смысле без дальнейших уточнений.

В [4] предложено семейство новых высокоточных *L*-устойчивых [5] численных методов для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с кусочно-постоянными параметрами и с учетом вариации заданных функций источников внутри шагов интегрирования. Основа методов – формула Коши [6] для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), в которой матричная экспонента [6] представлена в виде разложения аппроксимации Паде [7] на сумму простейших дробей [8]. *L*-устойчивые методы не имеют

ограничений на шаг интегрирования и подавляют паразитные колебания [5].

Метод ε -вложения [5] позволил преобразовать формулы для решения СОДУ к форме, пригодной для непосредственного решения дифференциально-алгебраических систем уравнений (ДАСУ) электрических цепей. Матрицы в этих формулах легко формируются прямо по схеме электрической цепи.

Это важное отличие новых методов от других высокоточных методов, для которых необходим непростой переход от исходной ДАСУ электрической цепи к СОДУ, либо нужны другие сложные действия. Второе отличие – экономичность вычислений. Новые методы требуют в несколько раз меньше арифметических операций, чем аналогичные по точности и устойчивости методы типа Рунге–Кутты [8]. Они годятся для обычных цепей и для цепей с жесткими и колебательными системами уравнений [4, 8].

Наиболее популярные методы – метод трапеций и метод на основе формул дифференцирования назад (ФДН) 2-го порядка точности учитывают поведение свободного члена только в узлах временной сетки. Метод трапеций имеет склонность к раскачке паразитных колебаний [2, 3], метод на основе ФДН дает существенное методическое затухание решения. У явных методов и методов на основе ФДН с порядком точности больше 2 возможны ограничения на шаг интегрирования. Методы на основе матричной экспоненты свободны от перечисленных недостатков. Они могут иметь порядок точности 3 и более, они одношаговые и одностадийные, учитывают вариации свободного члена внутри шага интегрирования.

В работе [2] предложен гибридный метод на основе неявного метода Эйлера и метода трапеций. Метод расчета на основе ФДН и метода Ньютона–Рафсона для динамических цепей с диодами показан в [9]. В [10] рассмотрен метод Эйлера с адаптацией шага интегрирования. Описанный в [11, 12] способ на основе матричной экспоненты годится лишь для простых линейных цепей. В работе [13] предложен метод на основе преобразования Лапласа и z -преобразования для расчета переходных процессов в длинных линиях. Существуют также различные высокоточные методы расчета электрических цепей, например, разработанные в [1, 14–16].

В [17] разработан численный метод решения нелинейных СОДУ в форме Коши. Подробный обзор современных методов для нелинейных цепей представлен в [18, 19]. Общий недостаток известных высокоточных методов – сложность теории и алгоритмов, ведущая к большим объемам вычислений при изменении параметров цепи. Это представляет проблему при расчетах нелинейных цепей и требует от инженеров глубоких знаний математики.

Переходные процессы играют важную роль в силовых импульсных устройствах, в цифровой технике, в электронике, радиотехнике и энергетике – фактически в любых электротехнических изделиях. Поэтому создание простых высокоточных методов для их расчета является актуальной задачей.

Цель представленного исследования состоит в том, чтобы приспособить семейство новых численных методов на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты [4] к расчетам переходных процессов в цепях с нелинейными резисторами.

Линеаризация ВАХ нелинейного резистора

Наиболее популярным методом расчета нелинейных электрических цепей является метод Ньютона–Рафсона. Однако он требует дифференцирования ВАХ и имеет высокую чувствительность к начальному приближению, поэтому он часто дает сбои. В нем используется локальная линеаризация ВАХ вида $u(i) = u(i_0) + R_d(i_0)(i - i_0)$, здесь R_d – дифференциальное сопротивление. Погрешность такого уравнения, как правило, растет от начала к концу шага интегрирования (рис. 1). Уменьшить ее можно, но это требует непростых вычислений [15].

Другой метод локальной линеаризации основан на замене нелинейного резистора статическим сопротивлением, его уравнения имеют вид $u(i) = R_{st}(i_0)i$ или $u(i) = R_{st}(i_0 + \Delta i)i$, здесь R_{st} – статическое сопротивление. Метод на основе статических сопротивлений обычно сходится медленнее, чем метод Ньютона, но реже дает отказы. Погрешность такой линеаризации также равна нулю только в одной точке шага интегрирования (см. рис. 1). Метод статических сопротивлений исследован в [20]. Идея предлагаемого метода линеаризации состоит в том, чтобы точно представить напряжение нелинейного резистора в пределах шага интегрирования в виде

$$u(i(t)) = R_{\Delta}i(t) + E_R(i(t)), \quad R_{\Delta} = (u(i_0 + \Delta i) - u(i_0))/\Delta i, \quad (1)$$

где R_{Δ} – конечно-разностное приближение производной (дифференциального сопротивления), $E_R(i(t))$ – добавочная функция (рис. 2). Далее R_{Δ} включается в матрицу $\mathbf{H}$ представленной ниже формулы расчета переходных процессов, а функция $E_R(i(t))$ в виде $E_T(t) = u(i(t)) - R_{\Delta}i(t)$ – в свободный член $\mathbf{f}$ этой формулы. При этом методы на основе матричной экспоненты позволяют учитывать динамику свободного члена в пределах шага интегрирования. Такая идея в несколько ином виде используется в [15].

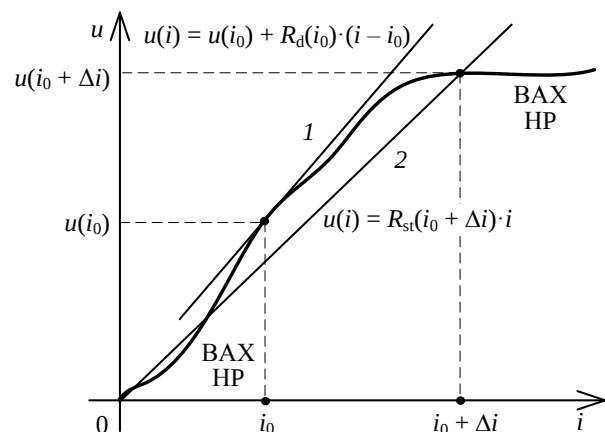


Рис. 1. Линеаризация ВАХ нелинейного резистора (ВАХ НП) с помощью дифференциального сопротивления (1) и с помощью статического сопротивления (2)

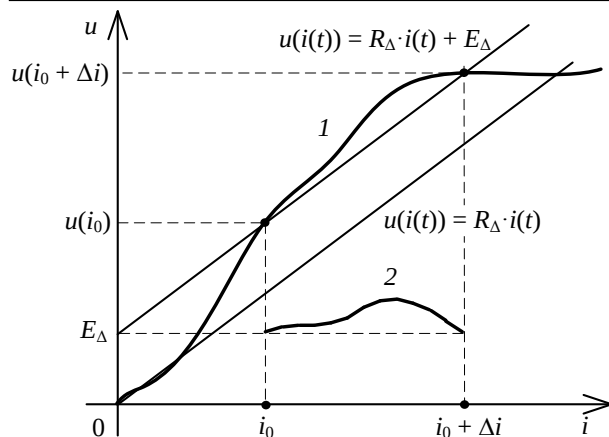


Рис. 2. Линейризация ВАХ нелинейного резистора (ВАХ НР) с помощью конечно-разностного представления дифференциального сопротивления и добавочной функции: 1 – ВАХ НР, 2 – $E_R(i(t))$

В простейшем случае функции $E_R(i(t))$ и $E_T(t)$ могут быть приближенно представлены константой E_Δ (см. рис. 2). Такое представление годится в том числе для метода Эйлера, метода трапеций и других методов расчета переходных процессов, использующих значения решения и свободного члена системы уравнений только в узлах временной сетки. Однако это упрощение снижает точность расчетов.

Чтобы найти функцию $E_T(t)$, нужно знать зависимость $i(t)$ в пределах шага интегрирования. Положим $t = 0$ в начале шага и $t = \Delta t$ в конце шага. Начальное значение $i_0 = i(0)$ известно. Значение $i_0 + \Delta i = i(\Delta t)$ уточняем с помощью последовательных приближений.

Для первого приближения используем сопротивление R_Δ и функцию $E_T(t)$ с предыдущего шага интегрирования, рассчитываем состояние цепи в момент $t = \Delta t$, находим $i(\Delta t)$. Далее получаем новое значение R_Δ по (1) и вычисляем функцию $i(t)$ в пределах шага интегрирования линейной интерполяцией по значениям $i(0)$ и $i(\Delta t)$ либо параболической интерполяцией по значениям $i(-\Delta t)$, $i(0)$ и $i(\Delta t)$, либо кубической интерполяцией по значениям $i(-2\Delta t)$, $i(-\Delta t)$, $i(0)$ и $i(\Delta t)$. Полиномы более высокой степени не дают уменьшения погрешности, по-видимому, из-за раскочки значений между точками коллокации. На каждой итерации имеем очередное приближение значения R_Δ и функции $E_T(t)$, которые подставляем в формулу для расчета состояния цепи в момент $t = \Delta t$.

Расчет переходных процессов

Поясним суть метода для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях [4], на основе которого возможен расчет процессов в цепях с нелинейными резисторами. Точнее, это семейство методов, из которого в этом примере мы используем вариант 3-го порядка точности на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12} . Уравнения цепи запишем в виде

$$\mathbf{G} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t),$$

где $\mathbf{G}$ – матрица, содержащая индуктивности катушек и емкости конденсаторов, $\mathbf{H}$ – матрица с коэффици-

ентами алгебраических уравнений цепи и правых частей дифференциальных уравнений, $\mathbf{x}(t)$ – вектор состояния цепи, содержащий токи ветвей и потенциалы узлов, $\mathbf{f}(t)$ – вектор-функция с источниками напряжения и тока. Покажем структуру матриц на простейшем примере цепи, изображенной на рис. 3.

Для этой цепи

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ \phi_1(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ -C \frac{dE_3(t)}{dt} \\ -J_1(t) \end{bmatrix}.$$

Состояние цепи $\mathbf{x}(\Delta t)$ в момент времени $t = \Delta t$ по ее состоянию $\mathbf{x}(0)$ в момент $t = 0$ и известным значениям функции $\mathbf{f}(0)$, $\mathbf{f}(\Delta t/3)$, $\mathbf{f}(2\Delta t/3)$, $\mathbf{f}(\Delta t)$ дает формула

$$\mathbf{x}(\Delta t) = 2 \operatorname{Re} \left[(\Delta t \mathbf{H} - \mathbf{z}_1 \mathbf{G})^{-1} \left(\mathbf{y}_1 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 b_{1k} \mathbf{f} \left(\frac{k \Delta t}{3} \right) \right) \right], \quad (2)$$

здесь $\mathbf{z}_1 = 2 - j\sqrt{2}$, $\mathbf{y}_1 = 1 + j2,5\sqrt{2}$;

$$b_{10} = 1,0606601717798216 j,$$

$$b_{11} = -1,5909902576697323 j,$$

$$b_{12} = 3,181980515339464 j,$$

$$b_{13} = -0,5 - 1,2374368670764584 j.$$

Формула (2) может быть легко преобразована к виду, в котором главная матрица имеет такую же структуру, как у метода узловых потенциалов [4]. Это значительно сокращает размерность задачи, но для описания расширения метода на нелинейные цепи (2) будет более понятной. Отметим, что матрицы в (2) также легко получаются по схеме цепи.

Формула (2) требует задания значений $\mathbf{f}(t)$ в 4 точках шага интегрирования. Наибольшее число точек равно порядку аппроксимации Паде + 1, для аппроксимации 3-го порядка R_{12} – это 4. Однако численные эксперименты показывают, что для аппроксимаций более высоких порядков увеличение числа точек практически не повышает точность расчетов. Возможно, точность ограничена степенью полинома для расчета тока внутри шага интегрирования.

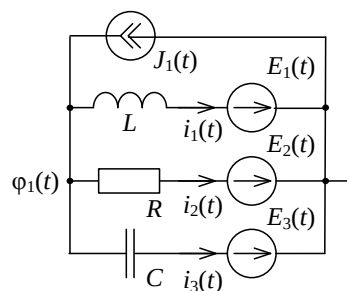


Рис. 3. Схема электрической цепи

Условия сходимости для резистивной цепи

Выделим в системе координат, в которой изображена ВАХ нелинейного резистора (ВАХ НР) (см. рис. 1 и 2), прямоугольник, в котором расположен участок ВАХ, имеющий отношение к расчету переходного процесса в цепи на данном шаге по времени и данной итерации. Это прямоугольник, ограниченный токами i_0 , $i_0 + \Delta i$ и напряжениями $u(i_0)$, $u(i_0 + \Delta i)$ (рис. 4).

Введем в этом прямоугольнике локальные координаты $\tilde{i}$ и $\tilde{u}$. Диагональ прямоугольника имеет уравнение $\tilde{u}(\tilde{i}(t)) = R_{\Delta} \tilde{i}(t)$, а ВАХ НР представляется в виде $\tilde{u}(\tilde{i}(t)) = R_{\Delta} \tilde{i}(t) + \tilde{E}_R(\tilde{i}(t))$. Линеаризация ВАХ – это замена участка ВАХ на диагональ $\tilde{u}(\tilde{i}(t)) = R_{\Delta} \tilde{i}(t)$. В локальных координатах это ВАХ статического сопротивления $R_{st} = R_{\Delta}$. Тогда можно применить условие сходимости итерационного процесса расчета цепи с нелинейным резистором методом статических сопротивлений, полученное в [20]. В самом плохом для сходимости случае, когда нелинейный резистор подключен к идеальному источнику напряжения, это условие имеет вид

$$0 < R_d < 2R_{st}. \quad (3)$$

Это условие выполняется для ВАХ вида $\tilde{u}(\tilde{i}) = c\tilde{i}^n$ при $0 < n < 2$, где $c > 0$ – некоторая константа. Поэтому локальное условие сходимости итераций для нелинейного резистора, включенного в любую резистивную цепь, можно сформулировать так: график ВАХ должен лежать внутри заштрихованной на рис. 4 области. Снизу эта область ограничена параболой $[u(i_0 + \Delta i) - u(i_0)](\tilde{i}/\Delta i)^2$. Из (3) следует, что ВАХ должна быть монотонно возрастающей функцией.

В общем случае, если нелинейный резистор включен в резистивную цепь с эквивалентным сопротивлением R_0 , условие сходимости для метода статических сопротивлений выглядит так [20]:

$$|R_d - R_{st}| < R_0 + R_{st}.$$

Отсюда можно получить условие сходимости для случая $R_d < R_{st}$ (для области над диагональю прямоугольника на рис. 4): $-R_0 < R_d$.

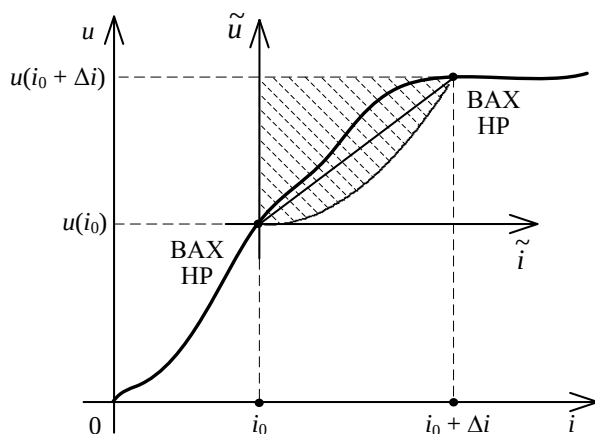


Рис. 4. Локальные координаты и область сходимости итерационного процесса (заштрихована)

Для случая $R_d > R_{st}$ (для области под диагональю прямоугольника) условие примет вид $\tilde{u}(\tilde{i}) > -R_0 \tilde{i} + c\tilde{i}^2$. Область сходимости будет ограничена снизу параболой

$$[u(i_0 + \Delta i) - u(i_0) + R_0 \Delta i](\tilde{i}/\Delta i)^2 - R_0 \tilde{i}.$$

Условие (3) будет расширено: $-R_0 < R_d < 2R_{st} + R_0$.

Чтобы не усложнять задачу теоретически возможными локальными колебаниями, мы рассматриваем только монотонные ВАХ.

Теорема Тевенена позволяет распространить полученные результаты на любые линейные и линеаризованные резистивные цепи, подключенные к нелинейному резистору. Итерационный процесс не рассчитывается решением ДАСУ цепи благодаря L -устойчивости используемых методов ее решения, кроме метода трапеций, который не обладает свойством L -устойчивости.

Для ускорения сходимости полезно применение релаксации в виде

$$R_{\Delta k+1} = 0,5 [R_{\Delta k} + u(i(\Delta t)) - u(i(0)) / (i(\Delta t) - i(0))].$$

Решение тестовых задач

Для тестирования программы на основе предложенного метода использовались различные ВАХ нелинейных резисторов. Далее показаны результаты для симметричной кусочно-линейной ВАХ, у которой в узлах характеристики дифференциальное сопротивление растет скачком с ростом тока в 1,8 раза (таблица, рис. 5). Для других ВАХ, в том числе с непрерывной зависимостью $R_d(i)$, характер представленных результатов существенно не меняется.

Нелинейный резистор с идеальным источником напряжения включался последовательно поочередно с постоянным резистором ($R = 10$ Ом), катушкой ($L = 0,2$ Гн) и конденсатором ($C = 200$ мкФ).

ВАХ резистора с растущим сопротивлением R_d

i, A	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
u, B	0	1,6	4,4	9,5	18,8	35,3	65,1	118,8	215,3

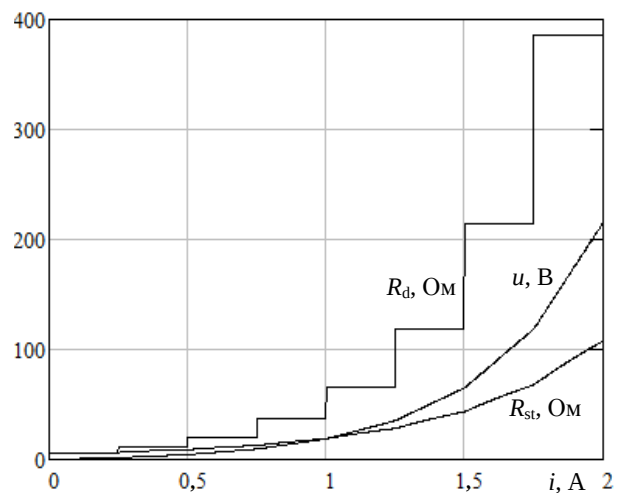


Рис. 5. ВАХ нелинейного резистора с растущим сопротивлением R_d

Зависимость ЭДС источника от времени предварительно определялась при синусоидальном токе амплитудой 2 А частотой 10 Гц. Затем эта ЭДС использовалась для численного расчета процесса в тестовой цепи. ВАХ нелинейного резистора масштабировалась так, чтобы его среднеквадратическое напряжение было равно напряжению постоянного пассивного элемента. Погрешность вычислялась сравнением численно рассчитанного тока нелинейного резистора с заданной идеальной синусоидой.

На рис. 6 для цепи с конденсатором и катушкой представлена зависимость относительной среднеквадратической погрешности тока δ от числа шагов интегрирования на период N .

Графики даны для метода Эйлера, метода трапеций и методов на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12} 3-го порядка точности и R_{23} 5-го порядка точности. Отметки $R_{12}(2)$ и $R_{23}(2)$ соответствуют параболической интерполяции тока в пределах шага интегрирования, $R_{12}(3)$, $R_{23}(3)$ – кубической интерполяции.

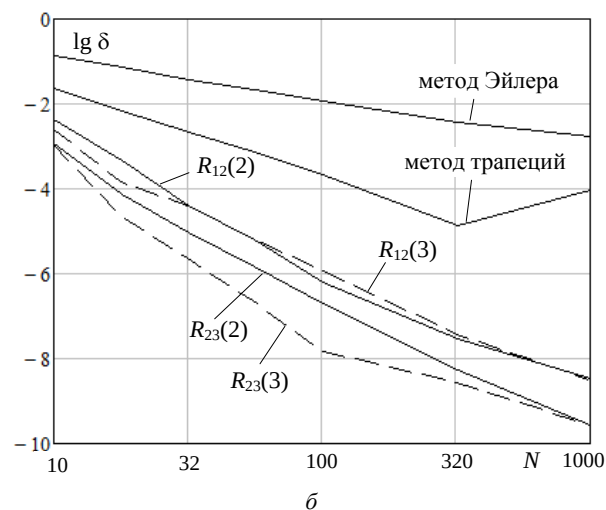
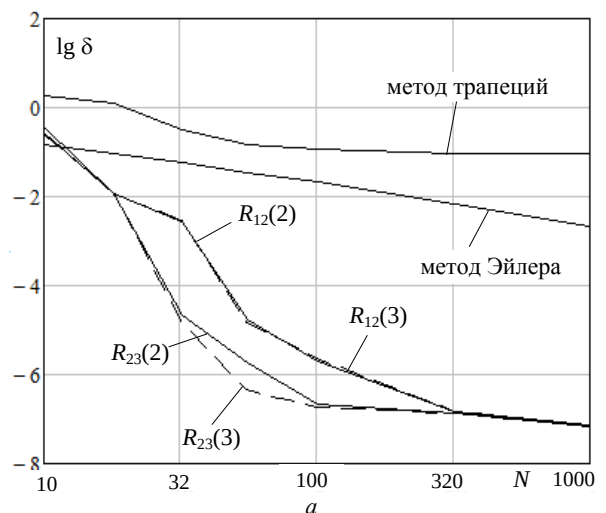


Рис. 6. Логарифм относительной среднеквадратической погрешности от числа шагов интегрирования на период.
а – нелинейный резистор с конденсатором,
б – нелинейный резистор с катушкой

На рис. 7 показано среднее число итераций для цепи с катушкой, которое потребовалось для достижения относительной разности между последовательными приближениями тока менее 10^{-6} .

Далее покажем пример расчета переходного процесса в более сложной цепи, схема которой показана на рис. 8.

Параметры цепи: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 20$ кОм, $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 1$ мГн, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 0,2$ мкФ. ВАХ нелинейного резистора задана формулой $u_3(i_3) = 10i_3^5$. Начальные условия: $i_4(0) = 2$ А, $i_5(0) = 0$, $u_6(0) = -5$ В, $u_7(0) = 0$.

Для сравнения численного решения с точным аналитическим решением применялся следующий прием. Вначале операторным методом рассчитывался ток $i_4(t)$ для переходного процесса в линейной цепи, показанной на рис. 9. При этом постоянный источник ЭДС E_1 имел напряжение 20 В. Далее напряжение источника ЭДС $E_{13}(t)$ в цепи с нелинейным резистором, показанной на рис. 8, полагалось равным $E_1 + u_3(i_4(t))$. Тем самым для линейной части цепи нелинейный резистор фактически исключался, так как его напряжение компенсировалось источником $E_{13}(t)$ – при условии верного расчета тока и напряжения этого резистора численным методом. В целом же численный расчет получался для реальной нелинейной цепи рис. 8 без каких-либо упрощений.

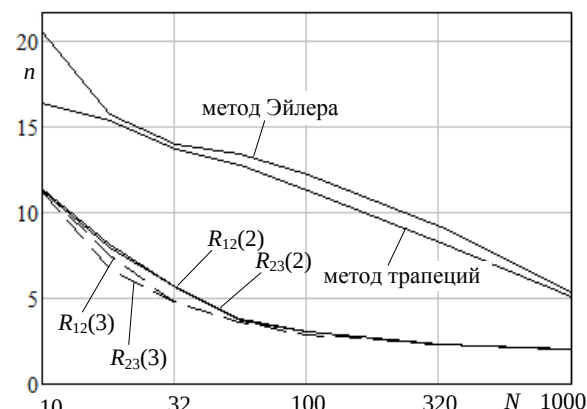


Рис. 7. Зависимость среднего числа итераций для решения нелинейной системы уравнений цепи на каждом шаге по времени от числа шагов интегрирования на период. Нелинейный резистор с катушкой

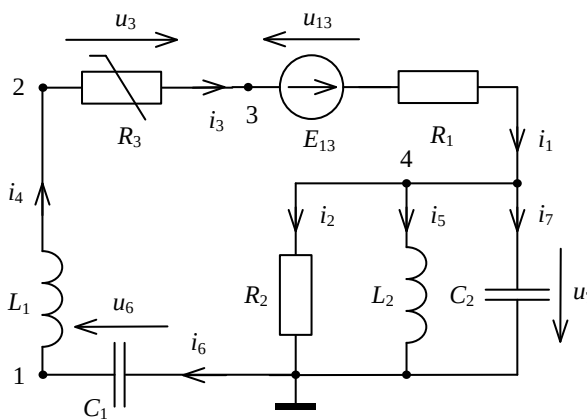


Рис. 8. Цепь с нелинейным резистором для численного расчета

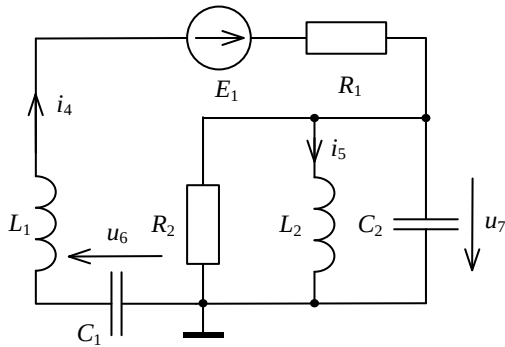


Рис. 9. Линейная цепь для расчета операторным методом

В исходном виде методы расчета переходных процессов непосредственно содержат уравнения ветвей, состоящих из одного пассивного двухполюсника с последовательно включенным источником ЭДС или без него. Для записи таких уравнений нужны простые узлы № 1–3. Можно использовать составные RL - и RC -ветви, что уменьшает число простых узлов, уравнений и неизвестных, но матрицы становятся чуть сложнее. Матрицы $\Delta t \mathbf{H} - z_k \mathbf{G}$ нетрудно привести к виду, подобному матрице метода узловых потенциалов. Это существенно сокращает размерность задачи [4]. Однако здесь для ясного представления методов покажем самый простой вариант формул. Этот вариант можно непосредственно использовать для расчетов, применяя методы решения систем уравнений для разреженных матриц.

Матрицы для цепи рис. 8 имеют вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_7 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T,$$

$$\mathbf{f} = [E_{13}(t) \ 0 \ -E_T(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Формула для метода на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{23} выглядит так:

$$\mathbf{x}(\Delta t) = (\Delta t \mathbf{H} - z_1 \mathbf{G})^{-1} \left(y_1 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 b_{1k} \mathbf{f} \left(\frac{k \Delta t}{3} \right) \right) + 2 \operatorname{Re} \left[(\Delta t \mathbf{H} - z_2 \mathbf{G})^{-1} \left(y_2 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 b_{2k} \mathbf{f} \left(\frac{k \Delta t}{3} \right) \right) \right],$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= 3,6378342527444945, \quad y_1 = -18,297498174845835, \\ z_2 &= 2,6810828736277523 - 3,050430199247411 j, \\ y_2 &= 7,648749087422917 - 4,171640244747441 j, \\ b_{10} &= -1,4456897385025358, \\ b_{11} &= -3,8031665043431016, \\ b_{12} &= 1,001957896137494, \quad b_{13} = -0,7828795111042717, \\ b_{20} &= 0,722844869251269 - 0,10110612415667874 j, \\ b_{21} &= 1,9015832521715508 - 0,14117930024617908 j, \\ b_{22} &= -0,5009789480687474 + 1,3180723497684803 j, \\ b_{23} &= -0,10856024444786472 - 0,33927937032482625 j. \end{aligned}$$

Формула для метода на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{34} имеет вид

$$\mathbf{x}(\Delta t) = 2 \operatorname{Re} \left[(\Delta t \mathbf{H} - z_1 \mathbf{G})^{-1} \left(y_1 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 b_{1k} \mathbf{f} \left(\frac{k \Delta t}{3} \right) \right) + (\Delta t \mathbf{H} - z_3 \mathbf{G})^{-1} \left(y_3 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 b_{3k} \mathbf{f} \left(\frac{k \Delta t}{3} \right) \right) \right],$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= -0,6232430928037013 + 1,3600845532157446 j, \\ y_1 &= -11,301539995971506 + 12,4716758502502 j, \\ z_3 &= 4,787193103128463 + 1,5674764168952087 j, \\ y_3 &= 13,301539995971508 - 60,071732737047355 j, \\ b_{10} &= -0,6232430928037013 + 1,3600845532157446 j, \\ b_{11} &= 1,0359181466945429 - 2,663457546206927 j, \\ b_{12} &= 0,46944067839791304 - 1,41102265408329 j, \\ b_{13} &= -0,18073859691170266 + 0,2273466755528692 j, \\ b_{30} &= 0,623243092803702 - 5,110492939064246 j, \\ b_{31} &= -1,0359181466945424 - 7,715491508183748 j, \\ b_{32} &= -0,4694406783979126 + 0,9543069059443732 j, \\ b_{33} &= -0,31926140308829787 - 0,283378909525589 j. \end{aligned}$$

Переходной процесс в цепи рис. 8 и рис. 9 имеет две составляющие с постоянными времени $\tau_1 = 5,501$ мс и $\tau_2 = 6,983$ мс, с периодами колебаний $T_1 = 2,958$ мс и $T_2 = 84,72$ мкс.

На рис. 10 показаны напряжение и ток нелинейного резистора, на рис. 11 – относительная среднеквадратическая погрешность тока нелинейного резистора в зависимости от числа точек интегрирования на период высокочастотной составляющей переходного процесса, на рис. 12 – число итераций k , нужное для выполнения условия

$$\|\mathbf{x}_k(\Delta t) - \mathbf{x}_{k-1}(\Delta t)\| / (\|\mathbf{x}_k(\Delta t)\| + \|\mathbf{x}_{k-1}(\Delta t)\|) < 10^{-6}.$$

Интервал интегрирования – один период низкочастотных колебаний $T_1 = 2,958$ мс. На рис. 10 и 11 обозначено: $R_{12}(2)$, $R_{23}(2)$, $R_{34}(2)$ – расчет методами на основе соответствующих аппроксимаций Паде мат-

ричной экспоненты с полиномом 2-й степени для вычисления тока нелинейного резистора внутри интервала интегрирования; $R_{12}(3)$, $R_{23}(3)$, $R_{34}(3)$ – с полиномом 3-й степени. Во всех представленных расчетах для функции f использовались 4 точки внутри шага интегрирования.

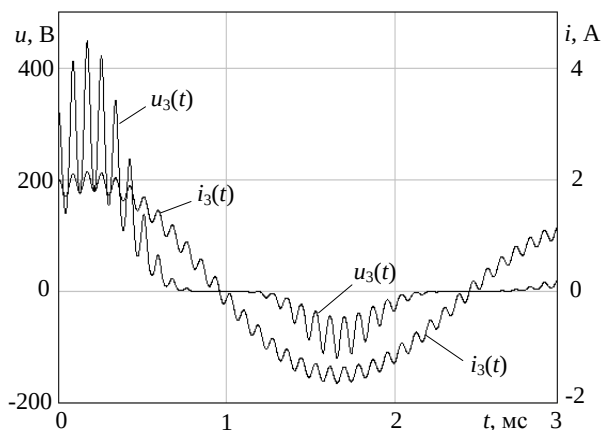


Рис. 10. Напряжение и ток нелинейного резистора

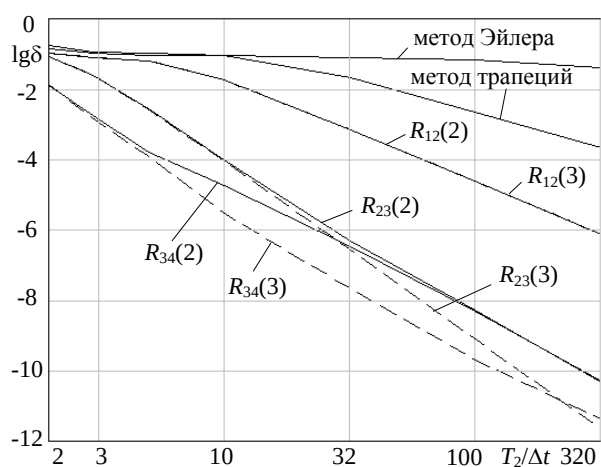


Рис. 11. Логарифм относительной среднеквадратической погрешности расчета тока нелинейного резистора в зависимости от числа точек интегрирования на период высокочастотных колебаний T_2

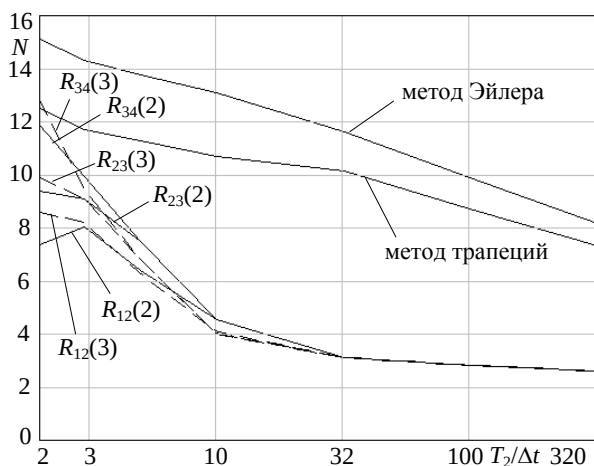


Рис. 12. Среднее число итераций, нужное для решения нелинейной системы уравнений разными методами

Анализ результатов

Для простейших цепей с катушкой и конденсатором, а также для сложной цепи новые методы дают погрешность на несколько порядков меньше, чем метод Эйлера и метод трапеций. Метод трапеций для цепи с конденсатором из-за раскачки колебаний дает неприемлемую относительную погрешность порядка 0,1 для любого числа шагов интегрирования на период. Расчет цепи с нелинейным резистором последовательно с постоянным резистором дает относительную погрешность порядка 10^{-6} для метода Эйлера и метода трапеций и 10^{-7} для методов на основе матричной экспоненты почти независимо от величины шага интегрирования.

Благодаря теореме Тевенена результаты решения представленных простейших тестовых задач можно распространить на любые линейные или линеаризованные цепи, у которых эквивалентное сопротивление представляет собой постоянный элемент, с которым были проделаны расчеты.

Несмотря на то, что на одну итерацию метод R_{12} требует примерно в 4 раза больше вычислений, чем метод Эйлера и метод трапеций, метод R_{23} в 5 раз, а R_{34} в 8 раз больше, число арифметических операций для достижения заданной точности у новых методов существенно меньше (с учетом соответствующего числа итераций и точек интегрирования на период колебаний решения). Достоинством новых методов является возможность высокоточных расчетов с даже с большим шагом интегрирования. Зависимость погрешности методов от величины шага интегрирования и от способа расчета токов нелинейных резисторов внутри шага интегрирования требует дальнейшего исследования.

Отметим, что рассмотренные выше условия сходимости являются, во-первых, локальными и, во-вторых, достаточными, но не необходимыми. То есть они обеспечивают сходимость, но при невыполнении этих условий сходимость не исключается. Выше рассмотрены условия сходимости итераций для нелинейного резистора, включенного последовательно к источнику ЭДС и линейному резистору. Переход к локальным координатам имеет строгое обоснование, которое не приводится из-за ограничений по объему статьи. В самом начале расчета значения R_Δ и E_Δ определяются с помощью численного или аналитического дифференцирования ВАХ нелинейного резистора при начальном токе. На самой первой итерации принимаем $E_T(t) \approx E_\Delta$.

Сходимость для цепей с катушкой и конденсатором требует дополнительных исследований. В статье рассмотрен нелинейный резистор, управляемый током. Аналогичный метод можно применить и для резистора, управляемого напряжением. При нарушении сходимости на каком-либо участке ВАХ проблема решается локальным уменьшением шага.

Если в пределах шага интегрирования функция $f(t)$ задана в виде $f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3$, то $x(\Delta t)$ для аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12} рассчитывается по формуле

$$\mathbf{x}(\Delta t) = 2 \operatorname{Re} \left[(\Delta t \mathbf{H} - \mathbf{z}_1 \mathbf{G})^{-1} \left(\mathbf{y}_1 \mathbf{G} \mathbf{x}(0) + \Delta t \sum_{k=0}^3 a_{1k} \mathbf{f}_k(\Delta t)^k \right) \right],$$

где $a_{10} = -0,5 + j\sqrt{2}$, $a_{11} = -0,5 + 0,25j\sqrt{2}$, $a_{12} = -0,5$, $a_{13} = -0,5 - 0,25j\sqrt{2}$.

Для остальных аппроксимаций Паде также возможно представление функции $\mathbf{f}$ в виде полинома. Его степень не превышает порядок точности метода, который равен сумме степеней числителя и знаменателя аппроксимации Паде. Для аппроксимации R_{12} он равен 3, для R_{23} равен 5, для R_{34} – 7. Неявный метод Эйлера 1-го порядка точности и метод трапеций 2-го порядка точности могут быть получены с помощью аппроксимаций Паде матричной экспоненты R_{01} и R_{11} соответственно.

Заключение

Применение новых высокоточных методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях расширено на цепи с нелинейными резисторами.

Предложен новый повышенной точности способ линеаризации ВАХ, сочетающий свойства линеаризации с помощью дифференциального и статического сопротивления, позволяющий перенести нелинейность в свободный член системы уравнений и учитывать ее в решении.

Предложен способ тестирования методов расчета нелинейных цепей с помощью аналитических расчетов линейных цепей.

Новые методы отличаются предельной простотой и универсальностью. Они хорошо приспособлены к расчетам нелинейных цепей, а также цепей с частыми коммутациями, для которых из-за изменений параметров цепи нужно решение задачи с новыми матрицами на каждом шаге интегрирования. Численные расчеты подтверждают работоспособность и надежность новых методов.

Далее предполагается развитие методов для их применения к цепям с нелинейными индуктивностями и емкостями, а также к параметрическим и нелинейно-параметрическим цепям.

Литература

- Гридин В.Н. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем / В.Н. Гридин, В.Б. Михайлов, Л.Б. Шустерман. – М.: Наука, 2008. – 342 с.
- Пилипенко А.М. Применение гибридных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений для анализа автоколебательных цепей с различной динамикой // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2026. – № 1 (249). – С. 112–122.
- Study of a Numerical Integral Interpolation Method for Electromagnetic Transient Simulations / K. Sun, K. Chen, H. Cen, F. Tan, X. Ye // Energies (MDPI). – 2024. – Vol. 17, No. 15. – Art. 3837. DOI: 10.3390/en17153837.
- Бурцев Ю.А. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с использованием аппроксимации Паде матричной экспоненты // Электричество. – 2024. – № 8. – С. 26–35.
- Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: пер. с англ. / Э. Хайпер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
- Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – Изд. 5-е. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
- Бейкер Дж. мл. Аппроксимации Паде: пер. с англ. / Дж. мл. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
- Бурцев Ю.А. Решение задачи Коши высокоточными методами на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты // Труды Института системного анализа РАН. – 2024. – Т. 74, № 1. – С. 3–12.
- Орлов А.И. Моделирование динамических режимов электрических цепей с диодами / А.И. Орлов, С.В. Волков, В.Т. Сидорова // Вестник Чувашского ун-та. – 2025. – № 4. – С. 98–110. DOI: 10.47026/1810-1909-2025-4-98-110.
- Hernandez H. A New Adaptive Step-size Euler ODE Solver // ForsChem Research Reports. – 2025. – Vol. 10 (part 1). – P. 233–264.
- Корнев А.С. Алгоритм расчета переходных процессов электрических цепей методом переменных состояния / А.С. Корнев, С.И. Вольский, И.П. Викулов, Н.В. Кузнецов, Д.А. Сорокин // Интеллектуальная электротехника. – 2022. – № 1. – С. 99–112.
- Корнев А.С. Алгоритм поиска аналитического решения для расчета переходных процессов методом матричной экспоненты / А.С. Корнев, Н.В. Кузнецов, С.И. Вольский, И.П. Викулов // Интеллектуальная электротехника. – 2023. – № 2. – С. 4–17.
- Shilin A.N. Improvement of the Accuracy of Transient Process Analysis in Complex Power Systems Using the Z-Transform Method / A.N. Shilin, A.A. Shilin, P.V. Dikarev, D.T. Ngo // Problemele Energeticii Regionale. – 2025. – No. 4 (68). – P. 118–130. DOI:10.52254/1857-0070.2025.4-68.09.
- Бычков Ю.А. Аналитически-численный метод расчета динамических систем / Ю.А. Бычков, С.В. Щербаков. – 2-е изд., доп. – СПб.: Энергоатомиздат, 2002. – 368 с.
- Михайлов В.Б. Спектральный численно-аналитический метод Ньютона–Канторовича–Михайлова для решения нелинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений и его применение для анализа нелинейных режимов радиоэлектронных схем / В.Б. Михайлов, В.В. Румянцев // Электричество. – 2012. – № 1. – С. 50–54.
- Артём А.Д. Новый метод расчета процессов в электрических цепях / А.Д. Артём, В.А. Филин, К.Ж. Есполов. – СПб.: Элмор, 2001. – 192 с.
- Бычков Ю.А. Численный расчет неавтономных динамических моделей с нелинейностями в виде нестепенных элементарных функций / Ю.А. Бычков, Е.Б. Соловьева, С.В. Щербаков // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 58–66.
- Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ-электронных устройств связи (обзор): ч. 1 // Проектирование и технология электронных средств. – 2012. – № 4. – С. 2–11.
- Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ-электронных устройств связи (обзор): ч. 2 // Проектирование и технология электронных средств. – 2013. – № 1. – С. 16–23.
- Бурцев Ю.А. Расчет переходных режимов в полупроводниковых преобразователях с применением статических сопротивлений и неявного метода Эйлера / Ю.А. Бурцев, А.В. Павленко, И.В. Васюков // Электротехника. – 2020. – № 12. – С. 13–19.

Бурцев Юрий Алексеевич

Канд. техн. наук, доцент каф. электроснабжения и электроприводов (ЭиЭ) Южно-Российского государственного политехнического университета им. М.И. Платова (ЮРГПУ НПИ)
ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, Россия, 346428
ORCID: 0000-0001-6663-3239
Тел: +7-961-305-22-76
Эл. почта: proton36@yandex.ru

Поступила в редакцию: 05.05.2026.

Принята к публикации: 04.08.2026.

Burtsev Y.A.

Development of Matrix-Exponential-Based Methods for Transient Analysis of Circuits with Nonlinear Resistors

Relevance. The development of new methods for transient analysis of electrical circuits is relevant despite the availability of numerous well-known methods and computer programs. The reason is that practical tasks impose a set of requirements that existing methods do not always fully satisfy. As a result, they give significant inaccuracy or even qualitatively incorrect results, or require excessive computational time and become very complicate or completely inapplicable. The methods should be suitable for stiff, oscillatory, and stiff-oscillatory circuits with a wide range of parameters; highly accurate (order of accuracy of at least 3); computationally efficient; be L -stable (this eliminates false oscillations and restrictions on the integration step); adapted for calculating nonlinear circuits and circuits with frequent switching; simple and convenient, without requiring configuration, preliminary calculations and evaluations. **The purpose of the study.** To expand the set of methods previously proposed by the author for calculating transients in linear electrical circuits on circuits with nonlinear resistors. **Methods.** The presented work is based on a new set of high-precision implicit numerical methods for calculating transients in linear electrical circuits. The new methods are based on decomposition of the Padé approximation of the matrix exponential into elementary partial fractions and satisfy all the requirements listed above. They are very well adapted to the structure of electrical-circuit equation systems, and they are much simpler than other high-precision methods. Nonlinear equations are solved using the method of simple iterations and current interpolation within the integration interval. **Scientific novelty.** New effective methods for calculating transients in linear circuits have been adapted to the calculation of circuits with nonlinear resistors. An original, high-precision linearization of the resistor current-voltage characteristic is proposed, together with a method for calculating currents within the integration interval. All results presented in this study were obtained personally by the author. **Results.** The proposed new methods make it possible to calculate arbitrary modes of circuits containing nonlinear resistors with an error several orders of magnitude smaller than that of the trapezoidal rule integration, one of the most commonly used for this purpose. **Practical significance.** Calculations of dynamic processes in circuits with nonlinear elements have numerous practical applications. In particular, they are required for the design of power semiconductor inverters, digital equipment, power supply systems, electronic and radio engineering devices and their components.

Keywords: electrical circuits, nonlinear resistors, transient processes, L -stable methods, high precision methods, matrix exponential, Padé approximation.

DOI: 10.21293/1818-0442-2026-29-2-189-198

References

1. Gridin V.N., Mikhaylov V.B., Shusterman L.B. *Chislenno-analiticheskoe modelirovaniye radioelektronnyh shem* [Numerical-analytical modelling of radioelectronic schemes]. Moscow, Nauka Publ., 2008, 342 p. (in Russ.).
2. Pilipenko A.M. [Application of hybrid methods for numerical solving of ordinary Differential Equations for Analysis of self-oscillating circuits with various dynamics]. *Izvestiya SFedU. Engineering sciences*, 2026, no. 1 (249), pp. 112–122 (in Russ.).
3. Sun K., Chen K., Cen H., Tan F., Ye X. Study of a Numerical Integral Interpolation Method for Electromagnetic Transient Simulations. *Energies (MDPI)*, 2024, vol. 17, no. 15, art. 3837. DOI: 10.3390/en17153837
4. Burtsev Y.A. [Calculation of transients in linear electrical circuits using the Padé approximation of a matrix exponent]. *Elektrichestvo*, 2024, no. 8, pp. 26–35 (in Russ.).
5. Hairer E., Wanner J. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Second revised edition. Berlin, Springer-Verlag, 1996, 599 p.
6. Ganmaher F.R. *Teoriya matritz* [Theory of matrixes – 5th edition]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 560 p. (in Russ.).
7. Baker J. Jr., Graves-Morris P. Padé approximants. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1981, 459 p.
8. Burtsev Y.A. [Solving of Cauchy Problem with High Precision Methods Based on Matrix Exponent]. *Trudy Instituta sistemnogo analiza rossiyskoy akademii nauk (Proceedings of the institute for systems analysis Russian academy of sciences)*, 2024, vol. 74, no. 1, pp. 3–12 (in Russ.).
9. Orlov A.I., Volkov S.V., Sidorova V.T. [Modeling of dynamic modes of electrical circuits with diodes]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2025, no. 4, pp. 98–110 (in Russ.).
10. Hernandez H. A New Adaptive Step-size Euler ODE Solver. *ForsChem Research Reports*, 2025, vol. 10, part 1, pp. 233–264.
11. Kornev A.S., Volskiy S.I., Vikulov I.P., Kuznetsov N.V., Sorokin D.A. [Algorithm for calculating transients in electrical circuits by the state-variable method]. *Smart Electrical Engineering*, 2022, no. 1, pp. 99–112 (in Russ.).
12. Kornev A.S., Kuznetsov N.V., Volskiy S.I., Vikulov I.P. [Search algorithm for calculating transients by matrix exponential method]. *Smart Electrical Engineering*, 2023, no. 2, pp. 4–17 (in Russ.).
13. Shilin A.N., Shilin A.A., Dikarev P.V., Ngo D.T. Improvement of the Accuracy of Transient Process Analysis in Complex Power Systems Using the Z-Transform Method. *Problemele energeticii regionale*, 2025, no. 4 (68), pp. 118–130.
14. Bychkov Y.A., Scherbakov S.V. *Analiticheskii-chislennyi metod rascheta dinamicheskikh sistem* [Analytical-numerical method for calculation of dynamic systems]. Saint-Petersburg, Energoatomizdat Publ., 2002, 368 p. (in Russ.).
15. Mikhaylov V.B., Rumyantsev V.V. [Newton–Kantorovich–Mikhailov spectral numerical analytical method for solving nonlinear differential algebraic equation systems and its application to the analysis of nonlinear modes of electronic circuits]. *Elektrichestvo*, 2012, no. 1, pp. 50–54 (in Russ.).
16. Artym A.D., Filin V.A. *Noviy metod rascheta processov v elektricheskikh tsepyah* [New method of calculation processes in electrical circuits]. Saint-Petersburg, Elmor Publ., 2001, 192 p. (in Russ.).
17. Bychkov Y.A., Solovieva E.B., Scherbakov S.V. Numerical Calculation of Non-Autonomous Dynamic Models with Nonlinearities in the Form of Non-Power Elemental Functions. *LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science*, 2022, vol. 15, no. 2, pp. 58–66 (in Russ.).

18. Lantsov V.N. *Sostoyaniye v oblasti metodov modelirovaniya nelineynykh VCH elektronnykh ustroystv svyazi (obzor) chast' 1* [The state of the art in modeling of nonlinear HF electronic communication devices (review) Part 1]. *Design and technology of electronic means*, 2012, no. 4, pp. 2–11 (in Russ.).

19. Lantsov V.N. *Sostoyaniye v oblasti metodov modelirovaniya nelineynykh VCH elektronnykh ustroystv svyazi (obzor) chast' 2* [The state of the art in modeling of nonlinear HF electronic communication devices (review) Part 2]. *Design and technology of electronic means*, 2013, no. 1, pp. 16–23 (in Russ.).

20. Burtsev Y.A., Pavlenko A.V., Vasyukov I.V. [Calculation of transient modes in semiconductor converters using static resistances and the implicit Euler method]. *Russian Electrical Engineering*, 2020, vol. 91, no. 12, pp. 730–736 (in Russ.).

Yuri A. Burtsev

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Electrical Power Department,
Platov South-Russian Polytechnic University (NPI)
132, Prosvesheniya st., Novocherkassk, Russia, 346411
ORCID: 0000-0001-6663-3239
Phone: +7-961-305-22-76
Email: proton36@yandex.ru

Received: 05.05.2026.

Accepted: 04.08.2026.