

УДК 004.85

К.С. Сарин

## Нечеткий классификатор типа Min-Max: обзор

В связи с ростом объема обрабатываемой информации и внедрением систем искусственного интеллекта в критически важные сферы деятельности, адаптация в режиме онлайн и интерпретируемость стали одними из важных требований к моделям машинного обучения. Популярные модели, такие как искусственные нейронные сети, не могут в полном объеме их выполнить. Нечеткие классификаторы типа Min-Max являются интерпретируемыми благодаря лежащей в их основе теории нечеткой логики и адаптируемы с приходом новой порции информации. Данная статья представляет всесторонний обзор литературы по моделям машинного обучения на основе нечетких классификаторов типа Min-Max. Представлены архитектура классификатора и принцип его работы. Проводится обзор модификаций и оценивается их эффективность. Указаны применения классификатора и его модификации в решении реальных прикладных задач. В заключение делаются выводы о работе классификатора и проблемах, которые остались нерешенными.

**Ключевые слова:** машинное обучение, нечеткий классификатор, анализ данных, адаптация классификатора.

**DOI:** 10.21293/1818-0442-2023-26-1-65-75

Классификация – один из наиболее важных аспектов создания систем искусственного интеллекта (СИИ) для процессов принятия решений [1]. Методы машинного обучения являются мощным инструментом построения систем классификации. Искусственные нейронные сети (ИНС), имитирующие мозговую нейронную систему, получили широкое применение в СИИ. Такое признание было получено благодаря высокой точности, скорости обучения и возможности работы с данными различной природы [2].

В настоящее время с экспоненциальным ростом объема обрабатываемой информации традиционные методы пакетного (автономного) обучения сталкиваются со многими ограничениями, поскольку они плохо адаптируются к быстрым изменениям данных и страдают от дорогостоящего повторного обучения в случае необходимости адаптации [3]. Свойство адаптации классификатора в режиме онлайн дает возможность дообучиться с приходом нового экземпляра данных без необходимости полного переобучения как со старой, так и с новой информацией [4].

Одной из основных проблем, связанных с ИНС и другими популярными классификаторами, используемыми как инкрементное, так и пакетное обучение, является катастрофическое забывание, также известное как дилемма стабильности – пластичности [5]. Данная дилемма связана с неспособностью классификатора сохранять информацию, полученную из старых обучающих данных, когда новые данные поглощаются этим классификатором. Следовательно, классификаторы часто забывают изученную информацию при получении новых данных.

Другой не менее важной проблемой является доверие к полученным результатам прогноза классификатора, особенно в критически важных сферах деятельности, таких как медицина, энергетика, оборона. Следовательно, модели машинного обучения должны предлагать человеку полезный механизм объяснения своих результатов [6]. Кроме этого, при анализе данных одним из важных свойств является способность извлекать объяснительные правила для

вывода из выборки данных [7]. ИНС считаются черными ящиками из-за того, что они не могут объяснить свои предсказанные результаты. Человек должен принять их без особой обоснованности.

В [8] предложен нечеткий классификатор типа Min-Max (FMM – Fuzzy Min-Max), чтобы преодолеть указанные выше проблемы. С одной стороны, алгоритм обучения имеет возможность адаптировать классификатор к изменяющимся данным, с другой стороны, архитектура модели и процедура нахождения решения, основанные на методах нечеткой логики, позволили добиться интерпретируемости и объяснимости полученного результата.

Цель настоящей работы заключается в обзоре и анализе классификатора FMM и его модификаций с представлением оценок их преимуществ и недостатков. На основе данного анализа специалисты в области машинного обучения могут повысить качество классификации FMM, проводя новые теоретические и практические исследования.

Статья организована следующим образом. Сначала рассматриваются архитектура FMM и принцип его работы. Далее проводится обзор модификаций классификатора и оценивается их эффективность. После рассматривается применение FMM и его модификации в решении реальных задач. В заключение делаются выводы о работе классификатора и проблемах, которые остались нерешенными.

### Архитектура нечеткого классификатора

Классификатор FMM основан на гипербоксах. Гипербокс – это нечеткое отношение, определяющее на пространстве признаков область, геометрически похожую на гиперпараллелепипед. Для задания такой области достаточно указать две точки гипербокса, которые содержат минимальные и максимальные значения координат фигуры (рис. 1). Данные точки совпадают с нижним и верхним углами, лежащими на диагонали.

С каждым гипербоксом связан один класс, т.е. предполагается, что экземпляр данных  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  со значениями признаков, попадающих внутрь ги-

пербокса, является экземпляром класса гипербокса. Функция принадлежности формирует нечеткие границы пространства гипербокса и задается следующим образом:

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \max(0, 1 - \max(0, \gamma \min(1, x_i - w_i))) + \dots \right. \\ \left. \dots + \max(0, 1 - \max(0, \gamma \min(1, v_i - x_i))) \right)$$

где  $\gamma$  – параметр чувствительности, который регулирует скорость уменьшения степени принадлежности отношения по мере увеличения расстояния от экземпляра  $x$  до гипербокса.

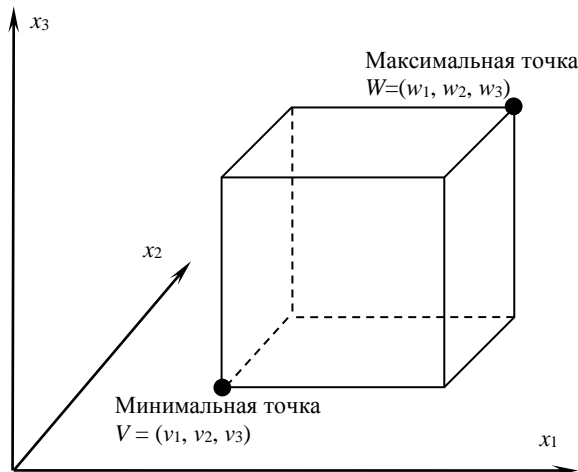


Рис. 1. Гипербокс в пространстве  $\mathbb{R}^3$

На рис. 2 представлен пример функции принадлежности в двумерном пространстве признаков с  $\gamma = 4$ .

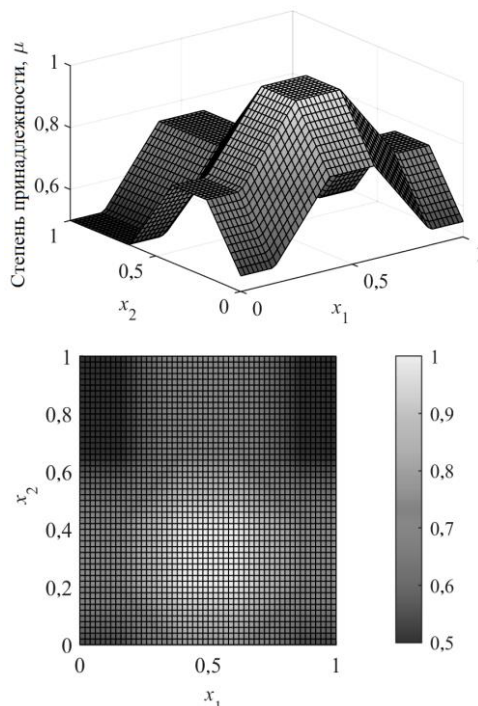


Рис. 2. Функция принадлежности нечеткого отношения в пространстве  $\mathbb{R}^2$ , формируемого гипербоксом с минимальной точкой  $V = (0,4; 0,2)$  и максимальной точкой  $W = (0,6; 0,4)$

Область, находящаяся в границах минимальной и максимальной точек, имеет степень принадлежности, равную 1, и образует прямоугольное плато. За границами этой области степень принадлежности постепенно уменьшается. При проекции на координаты пространства данных образуются функции принадлежности координат, с которыми могут быть связаны лингвистические термины, употребляемые в проблемной области.

На рис. 3 показана проекция функции рис. 2 на координату признака  $x_1$ , которая образует функцию принадлежности признака для лингвистического термина «Среднее».

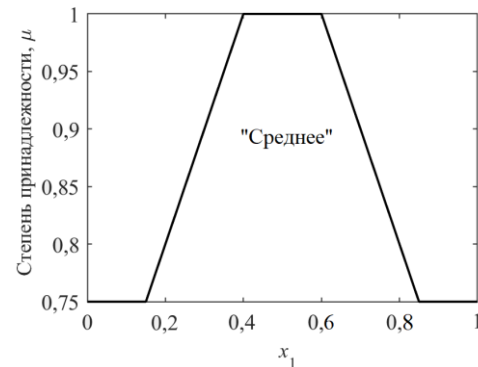


Рис. 3. Проекция функции принадлежности нечеткого отношения на координату признака  $x_1$ , которая образует функцию принадлежности признака для лингвистического термина «Среднее»

Предполагается, что каждый класс  $\square_k$ ,  $k = 1, \dots, c$ , является нечетким множеством. Данное множество определяется объединением нечетких отношений, сформированных гипербоксами  $B_j$  данного класса. То есть

$$\omega_k = \bigcup_{j \in K} B_j,$$

где  $K$  – множество индексов гипербокса, которые связаны с классом  $\square_k$ . Таким образом, степень принадлежности экземпляра  $\mathbf{x}$  множеству  $\square_k$ , с учетом выбора в качестве  $t$ -нормы функции максимум, вычисляется следующим образом:

$$\mu_{\omega_k}(\mathbf{x}) = \max_{j \in K} (\mu_{B_j}(\mathbf{x})).$$

Данная степень принадлежности является разделяющей функцией для класса  $\square_k$  в классификаторе. В итоге класс экземпляра  $\mathbf{x}$  определяется тем классом, который имеет максимальное значение степени принадлежности:

$$\mathbf{x} \in \omega_m, m = \arg \max_{k=1, \dots, c} (\mu_{\omega_k}(\mathbf{x})).$$

Также для понимания работы классификатора удобно представлять его в виде трехслойной нейронной сети, показанной на рис. 4. Входной слой имеет  $n$  элементов и соответствует признакам классифицируемого объекта. Элементы входного слоя соединены с элементами скрытого слоя, представляющего слой гипербокса из  $m$  элементов. Данное соединение настраивается с помощью алгоритма обучения, которым находятся минимальная  $V_j$  и

максимальная точка  $W_j$  точка каждого гипербокса  $B_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), а также соответствующий ему класс. Скрытый слой соединен с выходным слоем. Это соединение предполагает вычисления степени принадлежности объекта каждому гипербоксу и вычисления разделяющих функций как степеней принадлежности классу. Из-за схожести архитектуры нечеткого классификатора типа Min-Max с трехслойной нейронной сетью он получил также название нечеткой нейронной сети типа Min-Max.

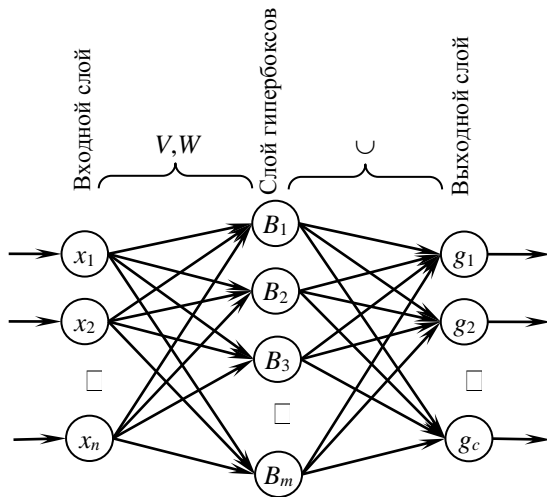


Рис. 4. Трехслойная нейронная сеть, представляющая нечеткий классификатор типа Min-Max

Построение классификатора фактически сводится к построению гипербокса и их привязки к определенному классу. Каждый гипербокс определяет нечеткое правило, которое может быть интерпретировано для гипербокса  $B_j$  класса  $\square_k$  следующим образом:

ЕСЛИ  $x_1 = A_{1j}$  И  $x_2 = A_{2j}$  И ... И  $x_n = A_{nj}$  ТО  $\mathbf{x} \in \square_k$ ,

где  $A_{ij}$  – лингвистический терм, функция принадлежности которого образована проекцией гипербокса  $B_j$  на координату  $i$ . Множество гипербокса определяют базу правил классификатора.

**Алгоритм обучения**

Алгоритм обучения FMM, предложенный Симпсоном [8], является эвристическим и относится к алгоритмам, которые адаптируют классификатор в режиме онлайн. В ходе работы алгоритма на вход последовательно подаются экземпляры обучающих данных. Следует отметить, что значение признаков экземпляров данных масштабируется в диапазон  $[0, 1]$ . Таким образом, пространство экземпляров, а также функций принадлежности будет ограничено  $n$ -мерным единичным кубом  $I^n$ .

Процесс обучения начинается с выбора экземпляра данных и поиска гипербокса такого же класса, который может быть *расширен* при необходимости. Необходимость расширения потребует, если полученный экземпляр имеет степень принадлежности меньше 1. Если гипербокс не удовлетворяет критериям расширения, то создается новый гипербокс из

полученного экземпляра данных с соответствующим классом. Минимальная и максимальная точки в таком случае будут совпадать. Одним из последствий расширения может быть *перекрытие* гипербокса. Перекрытие не является проблемой, когда происходит между гипербоксами, представляющими один и тот же класс. Перекрытие между гипербоксами, представляющими разные классы, устраняется с помощью процесса *сжатия*. Сжатие устраняет только перекрытие между теми частями гипербокса, которые имеют полное членство, т.е. степень принадлежности, равную 1. Между неединичными значениями частей каждого из гипербокса нечеткого отношения перекрытия могут существовать. Далее выбирается следующий экземпляр, и работа повторяется.

Таким образом, работа алгоритма обучения разделена на три этапа, которые применяются к каждому поступающему экземпляру данных.

**Этап расширения:** определяется гипербокс, который может быть расширен. Если такой гипербокс не найден, то добавляется новый класс экземпляра. Если найден, то он расширяется.

**Этап проверки на перекрытие:** определяется, перекрывает ли расширенный или добавленный гипербокс гипербокса других классов.

**Этап сжатия:** если существует перекрытие между гипербоксами разных классов, оно устраняется таким образом, чтобы изменения в гипербоксах были минимальными.

Ниже представлены этапы более подробно.

*Начало.*

**Инициализация.** Установить параметр обучения  $\theta \in [0, 1]$  как верхнюю границу размера гипербокса. Этот параметр будет использован на этапе *растяжения*. Базу правил установить пустой.

1. **Расширение.** Получить экземпляр данных  $(\mathbf{x}, d)$ , где  $d$  – метка класса. Если  $\mathbf{x}$  находится в области гипербокса такого же класса со степенью принадлежности 1, то базу правил не менять и снова перейти на шаг 1. Иначе найти среди гипербокса класса  $d$  такой гипербокс  $B_j$ , для которого значение степени принадлежности  $\mu_j(\mathbf{x})$  будет максимальным. Для  $B_j$  проверить условие растяжимости

$$n\theta \geq \sum_{i=1}^n (\max(w_{ji} - x_i) - \min(v_{ji} - x_i)).$$

Данное условие говорит о том, что после растяжения среднее значение стороны гипербокса по всем измерениям не должно превышать  $\theta$ . Если условие не выполняется, то создается новый гипербокс из полученного экземпляра данных с соответствующим классом и добавляется в базу правил. Если выполняется, то  $B_j$  расширяется путем увеличения измерений таким образом, чтобы он накрывал этот экземпляр (рис. 5).

Минимальная точка гипербокса  $B_j$  при этом принимает следующее значения:

$$v_{ji}^{new} = \min(v_{ji}^{old}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а максимальная

$$w_{ji}^{\text{new}} = \max(w_{ji}^{\text{old}}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

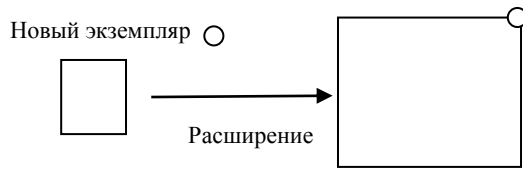


Рис. 5. Расширение гипербокса

2. Проверка на перекрытие. Для гипербокса  $B_j$ , который был получен или расширен на предыдущем этапе 1, проверить, перекрывается ли он с гипербоксами другого класса. Перекрытие происходит тогда, когда перекрывается каждое измерение гипербокса. Если происходит перекрытие, то необходимо найти такое измерение  $k$ , на котором величина перекрытия будет минимальная. Именно по этому измерению будет проводиться сжатие гипербокса, чтобы устранить перекрытие. Минимальное перекрытие выбирается для того, чтобы минимизировать сжатие гипербокса. Вариантов перекрытия измерения двух гипербокса может быть 4. Данные варианты и расчеты величины перекрытия  $\Delta_j$  для  $j$ -го измерения приведены ниже.

Вариант 1:  $v_{ji} < v_{ii} < w_{ji} < w_{ii}$ ,  $\Delta_i = w_{ji} - v_{ii}$ .

Вариант 2:  $v_{ii} < v_{ji} < w_{ii} < w_{ji}$ ,  $\Delta_i = w_{ii} - v_{ji}$ .

Вариант 3:  $v_{ji} < v_{ii} < w_{ii} < w_{ji}$ ,  $\Delta_i = \min(w_{ii} - v_{ji}, w_{ji} - v_{ii})$ .

Вариант 4:  $v_{ii} < v_{ji} < w_{ji} < w_{ii}$ ,  $\Delta_i = \min(w_{ji} - v_{ii}, w_{ii} - v_{ji})$ .

Найти гипербокс  $B_i$ , который перекрывается с  $B_j$ , определить измерение  $k$ :

$$k = \arg \min_{i=1, \dots, n} (\Delta_i)$$

и перейти на шаг 3. Если таких гипербокса нет, перейти на шаг 1.

3. Сжатие перекрывающихся гипербокса. Уменьшить величину гипербокса по измерению  $k$  согласно схеме, представленной на рис. 5. На рис. 5, а представлено сжатие для вариантов 1 и 2, на рис. 5, б – для вариантов 3 и 4.

Изменения точек максимума и минимума гипербокса при сжатии проводится в зависимости от вариантов перекрытия следующим образом:

Вариант 1:

$$w_{jk}^{\text{new}} = v_{ik}^{\text{new}} = v_{ik}^{\text{old}} + \frac{\Delta_k}{2}.$$

Вариант 2:

$$v_{jk}^{\text{new}} = w_{ik}^{\text{new}} = v_{jk}^{\text{old}} + \frac{\Delta_k}{2}.$$

Вариант 3: Если  $w_{ik} - v_{jk} < w_{jk} - v_{ik}$ , то  $w_{ik}^{\text{new}} = w_{jk}^{\text{old}}$ . Если  $w_{ik} - v_{jk} > w_{jk} - v_{ik}$ , то  $w_{ik}^{\text{new}} = v_{ik}^{\text{old}}$ .

Вариант 4: Если  $w_{ik} - v_{jk} < w_{jk} - v_{ik}$ , то  $v_{jk}^{\text{new}} = v_{jk}^{\text{old}}$ . Если  $w_{ik} - v_{jk} > w_{jk} - v_{ik}$ , то  $v_{jk}^{\text{new}} = w_{ik}^{\text{old}}$ .

Перейти на шаг 2 для обнаружения следующих перекрывающихся гипербокса.

Конец.

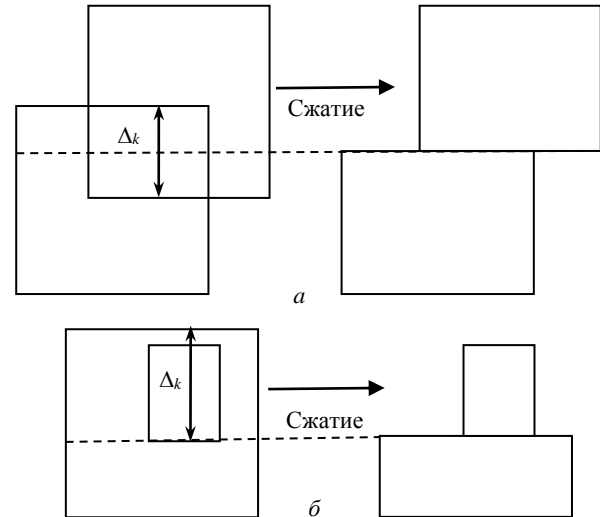


Рис. 6. Сжатие гипербокса для вариантов перекрытия: а – 1 и 2; б – 3 и 4

Существует ряд вариантов FMM, которые поддерживают те же этапы обучения и применяют некоторые модификации для преодоления ограничений FMM или повышения его производительности путем обновления процедуры расширения, функции принадлежности, а также расширения правил проверки перекрытия или правил сжатия. Ниже представлены различные варианты FMM.

#### Модификации без процедуры сжатия

В [9] было замечено, что процесс сжатия излишне устраняет части гипербокса. Исключение этих частей означает, что вклад в обучение данных, содержащихся в этих областях, сводится к нулю. Если обучение нейронной сети предполагает только один проход по данным, то это необратимая потеря, которая проявляется в ухудшении качества классификации. Поэтому было предложено убрать процесс сжатия, но при этом создавать гипербоксы двух типов: гипербоксы включения, которые содержат экземпляры, принадлежащие одному и тому же классу, и гипербоксы исключения, которые содержат экземпляры, принадлежащие двум или более классам, таким образом представляя спорные области пространства шаблонов.

Гипербокс включения представляет данные, принадлежащие классу, а гипербокс исключения представляет собой область перекрытия между разными классами. Экземпляр данных, попадающий в зону перекрытия, классифицируется как пустой класс, т.е. класс не предлагается. Производительность этого метода снижается, когда объем гипербокса исключения сравним с объемом гипербокса включения, поскольку доля выборок данных, которые классифицируются как пустой класс, может стать неприемлемо высокой. С этими двумя типами гипербокса каждое нечеткое множество классов представляется как объединение гипербокса включения одного и того же класса за вычетом объединения гипербокса исключения. Такая модификация получила название классификатор включения / исключения (EFC).

Дальнейшее развитие данный классификатор получил в работе [10] и с названием нечеткий классификатор типа Min-Max с компенсаторной нейронной архитектурой (FMCN). Здесь гипербоксы исключены были заменены на компенсаторные нейроны. Такое введение вдохновлено рефлекторной системой человеческого мозга. Компенсаторные нейроны активны только в том случае, если образец данных попадает в перекрывающуюся область двух гипербоксов, представляющих разные классы, т.е. когда существует неоднозначность в отношении определения класса или степени принадлежности экземпляров данных. Вычисление степени принадлежности экземпляра классу определяется здесь уже с учетом значения компенсаторных нейронов. Этот вариант демонстрирует более высокую эффективность в решении проблемы перекрытия классов, чем предыдущие модели [11]. Структура FMCN усложняется за счет использования компенсаторных нейронов, что увеличивает количество узлов в ее скрытом слое.

Многоуровневый нечеткий классификатор типа Min-Max (MLF), предложенный в [12] так же не использует процедуру сжатия. Данный классификатор представляет собой многоуровневую древовидную структуру. Каждый узел дерева представляет собой отдельный классификатор с гипербоксами небольшого размера. Конечный результат формируется путем объединения выходов этих классификаторов. При сравнении данный классификатор показал наименьшую чувствительность к параметру максимального размера гипербокса  $\theta$ .

#### Модификации с процедурой сжатия

Первым значительным расширением оригинальной FMM является общая нечеткая нейронная сеть типа Min-Max (GFMM), представленная в [13]. Данная сеть GFMM может одновременно обрабатывать помеченные и непомеченные экземпляры данных, комбинируя контролируемое и неконтролируемое обучение в единый алгоритм. Такая особенность позволяет использовать GFMM в трех различных режимах: классификация, кластеризация и гибридный режим (обучающие данные представляют собой смесь помеченных и непомеченных данных). Модифицирована нечеткая функция принадлежности гипербокса. В отличие от функции FMM здесь степень принадлежности уменьшается с увеличением расстояния от гипербокса. В GFMM предложено адаптивное изменение максимального размера гипербокса  $\theta$  на этапе обучения. Но данный подход предполагает неоднократный проход по обучающим данным, чтобы подобрать приемлемое значение. Эмпирически было установлено, что GFMM производит меньше гипербоксов по сравнению с FMM и демонстрирует более низкие показатели ошибочной классификации [14].

Мохаммед и Лим [15] представили усовершенствованную модель FMM (EFMM) для преодоления ряда ограничений FMM. В ней вводятся три эвристики для улучшения этапа обучения FMM, а имен-

но модифицированные процедуры расширения, теста на перекрытие и сжатия. Во-первых, процедура расширения обновляется с использованием нового правила расширения, которое использует ограничения на размер каждого измерения, а не суммирование всех измерений. Использование нового правила расширения приводит к уменьшению областей перекрытия между гипербоксами, принадлежащими разным классам. Во-вторых, правила проверки перекрытия расширены, чтобы охватить все случаи перекрытия. Классификатор FMM учитывал только четыре варианта перекрытия, в [15] было продемонстрировано, что существует еще пять, которые раньше никак не учитывались. Наконец, вводится новая процедура сжатия для устранения всех перекрывающихся случаев. EFMM сокращает все перекрывающиеся измерения, а не только минимально перекрывающееся измерение, как в FMM. Эти новые эвристические правила делают EFMM более точным, чем предыдущие варианты. Сложность выделена как основная проблема EFMM из-за использования правила расширения.

В [16] представлен вариант FMM, обозначаемый как KnFMM, в котором применяется  $k$ -ближайших правил к традиционной модели FMM. FMM рассматривает гипербокс с максимальным нечетким значением функции принадлежности для расширения. Предлагаемый метод имеет  $k$  гипербоксов с  $k$  максимальными значениями нечеткой функции принадлежности. Классический FMM генерирует новый гипербокс, когда гипербокс с наибольшим нечетким значением функции принадлежности не соответствует критериям расширения для добавления текущего шаблона. Однако в данном варианте гипербокс со следующим максимальным значением нечеткой функции принадлежности проверяется на расширение, если гипербокс с наибольшим значением нечеткой функции принадлежности не соответствует критериям расширяемости. Эта процедура продолжается для  $k$  гипербоксов, имеющих  $k$  наибольших значений нечеткой функции принадлежности. Генерируется новый гипербокс для добавления текущей обучающей выборки только в том случае, если все  $k$  гипербоксов не удовлетворяют условию расширения.

В [17] предлагается нечеткий классификатор PFMM. В нем изменены критерии для выбора расширяемого гипербокса. Если существует несколько кандидатов на расширение с одинаковыми максимальными значениями функции принадлежности, данный критерий позволяет выбрать один. Во-вторых, предложен новый набор тестов на перекрытие для рассмотрения всех типов перекрывающихся регионов. В-третьих, представлен новый набор правил сжатия для урегулирования перекрывающихся областей. В-четвертых, предложена новая стратегия гипербокса для уменьшения сложности системы. Эмпирически на пяти наборах данных из области медицины было установлено, что предложенный PFMM более точно классифицирует наборы данных,

чем FMM, EFMM и KnFMM. Более того, PFMM создает меньшее количество гипербоксов по сравнению с данными аналогами.

Концептуальное решение для использования новых функций принадлежности в FMM представлено в работе [18]. Здесь функция принадлежности формируется на основании центраида, который определяется «кучностью» обучающих данных, и евклидова расстояния от данного центраида.

#### Модификации с использованием пакетного режима обучения

Помимо модификаций, направленных на онлайн-обучение, были предложены модификации, которые использовали пакетное обучение. Алгоритм пакетного обучения использует все экземпляры обучающих данных и утратили способность однократной сквозной онлайн-адаптации. Время обучения таких алгоритмов обычно больше, но и точности получающихся моделей выше. Азад и Джа [19] предположили, что серия шагов расширения и сжатия приводит к изменению размеров гипербоксов и влияет на производительность прогностической модели. Поэтому авторы предложили использовать генетические алгоритмы для оптимизации минимальных и максимальных значений гипербоксов, сгенерированных исходной FMM. Такой классифи-

катор получил аббревиатуру FMMGA. В следующей работе [20] они использовали оптимизацию роящихся частиц вместо генетических алгоритмов и добились лучшей производительности.

В [21] предложен классификатор на основе случайных гипербоксов (Random Hyperboxes, RH). Данный классификатор является ансамблем, построенным из отдельных классификаторов на основе гипербоксов. Каждый такой гипербокс обучен на случайных подмножествах выборок и признаков обучающего набора данных. Эксперименты показали преимущества в точности классификации. Однако значительно улучшенная прогностическая эффективность предлагаемого метода RH достигается ценой потери интерпретируемости, что характерно для ансамблевых методов.

В работе [22] предлагается операция оптимизации, которая может устранить проблему перекрытия гипербоксов. Реализуется такая операция с помощью глубоких слоев, где их количество определяется сразу после устранения перекрытия между гипербоксами.

Резюмируя вышеприведенные модификации классификатора, сформирована табл. 1. Здесь классификаторы разделены на три типа модификаций.

Таблица 1

Модификации нечеткого классификатора типа Min-Max

Тип модификации	Описание	Аббревиатура
Без процедуры сжатия	Нечеткий классификатор типа Min-Max включения/исключения	EFC [9]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max с компенсаторной нейронной архитектурой	FMCN [10]
	Многоуровневый нечеткий классификатор типа Min-Max	MLF [12]
С процедурой сжатия	Нечеткий классификатор типа Min-Max	FMM [8]
	Общая нечеткая нейронная сеть типа Min-Max	GFMM [13]
	Усовершенствованный нечеткий классификатор типа Min-Max	EFMM [15]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max к ближайших гипербоксов	KnFMM [16]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max с измененным критерием расширения	PFMM [17]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max с функцией принадлежности на основе центраида	FMMMF [18]
Пакетное обучение	Нечеткий классификатор типа Min-Max с генетическим алгоритмом	FMMGA [19]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max с алгоритмом роящихся частиц	FMMGA [20]
	Ансамблевый классификатор на основе случайных гипербоксов	RH [21]
	Нечеткий классификатор типа Min-Max на основе глубокой нейронной сети	FMMNN [22]

#### Оценка эффективности модификаций

Оценка эффективности работы предложенных модификаций в основном проводилась авторами в сравнении с оригинальным FMM. В [9] классификатор EFC на наборе данных IRIS из репозитория UCI университета в Ирвине (<https://archive.ics.uci.edu/>) продемонстрировал точность в пределах 97–100% при значениях параметра максимального размера гипербокса  $\theta \in \{0,4; 0,2; 0,06; 0,03\}$ . Значение точности FMM при этом находилось в пределах 92–97,33%. Количество гипербоксов для EFC принимало значение 4–42, для FMM – 16–56.

Классификатор FCN в работе [10] проверялся на четырех реальных наборах данных из UCI и показал лучшие результаты точности по сравнению с FMM и GFMM при варьировании максимального размера гипербокса  $\theta$  в пределах 0,02–0,2. Многоуровневый классификатор MLF в [12] показал луч-

шие результаты точности на 12 из 14 наборов данных из UCI. В сравнении также принимали участие GFMM, EFC, FMCN. Коэффициент  $\theta$  варьировался в диапазоне 0–0,1 с величиной шага 0,01.

Практически все сравнения проводились на небольшом количестве наборов данных, и результат сравнений отчасти зависел от его выбора. На этом фоне выделяются работы [21, 23]. В первой работе сравнивались по точности FMM, GFMM, EFMM, KnFMM и RH на 20 наборах данных из репозитория UCI. Результаты сравнения приведены в табл. 2. Критерий суммы рангов Фридмана показал статистические различия в производительности этих классификаторов на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  ( $p$ -value < 0,0001). Лучшую производительность продемонстрировал RH со средним рангом 4,55, EFMM – 3,3, KnFMM – 3,25, GFMM – 2,05, FMM – 1,85. Высокая точность RH в первую очередь обусловлена

пакетным режимом обучения и наличием ансамбля классификаторов.

В [23] сравнивались по точности и количеству гипербоксов FMM, GFMM, EFMM, KnFMM на 16 наборах данных из репозитория UCI. Максимальное

значение гипербокса  $\theta$  выбиралось из множества  $\{0,06; 0,1; 0,16; 0,2; 0,26; \dots; 0,8\}$ . Сохранились лучшие значения. Результаты сравнения представлены в табл. 3.

Таблица 2

Сравнения точности классификации нечетких классификаторов Min-Max (%) [21]

№	Набор данных	FMM	GFMM	EFMM	KnFMM	RH
1	balance_scale	75,24	78,64	78,61	78,61	84,97
2	banknote_authentication	99,85	99,77	99,89	99,88	99,72
3	blood_transfusion	68,11	66,38	67,64	66,66	71,90
4	breast_cancer_wisconsin	96,50	95,22	96,28	96,28	96,80
5	breastcancercoimbra	64,68	67,22	66,40	66,40	69,19
6	sonar	81,32	79,72	83,99	83,99	85,28
7	haberman	62,46	63,22	64,06	63,89	66,51
8	heart	80,19	76,45	78,62	78,62	82,78
9	movement_libras	80,34	81,52	81,81	81,64	82,79
10	pima_diabetes	67,60	69,68	70,18	70,66	71,23
11	plant_species_margin	69,96	58,41	77,12	77,12	74,34
12	plant_species_shape	50,03	55,77	50,53	53,70	60,07
13	ringnorm	78,11	61,42	63,91	58,09	94,76
14	landsat_satellite	82,84	88,10	87,86	88,31	89,23
15	twonorm	94,19	93,70	94,52	94,52	96,98
16	vehicle	66,37	66,41	68,37	67,88	70,15
17	vertebal	73,96	74,24	74,31	74,63	77,43
18	vowel	95,46	96,33	96,90	96,81	96,49
19	waveform	75,23	75,84	76,70	76,70	83,07
20	wireless	97,79	97,93	98,11	98,41	98,36
	<b>Среднее значение</b>	<b>78,01</b>	<b>77,30</b>	<b>78,79</b>	<b>78,64</b>	<b>82,60</b>
	<b>Средний ранг</b>	<b>1,85</b>	<b>2,05</b>	<b>3,3</b>	<b>3,25</b>	<b>4,55</b>

Таблица 3

Сравнения количества гипербоксов NG и точности ACC (%) нечетких классификаторов Min-Max [23]

№	Наборы данных	FMM		GFMM		EFMM		KnFMM	
		ACC	NG	ACC	NG	ACC	NG	ACC	NG
1	Circle	95,70	209,7	96,60	172,0	96,90	282,7	96,30	116,5
2	Complex 9	100,0	450,2	100,0	198,7	99,97	458,5	100,0	257,2
3	Diagnostic Breast Cancer	96,84	383,0	95,25	62,25	95,61	381,2	95,96	257,7
4	Glass	72,88	109,0	69,60	107,2	72,41	110,5	74,27	101,5
5	Ionosphere	89,17	208,5	87,74	191,7	91,17	229,0	91,17	226,0
6	Iris	96,02	37,50	94,71	52,25	94,68	47,75	94,68	27,50
7	Ringnorm	83,97	1899	86,96	507,2	74,58	2263	81,73	1217
8	Segmentation	96,49	906,0	95,84	803,5	97,79	1205	97,75	994,5
9	Spherical_5_2	98,81	21,25	98,79	22,00	98,80	24,50	98,80	14,75
10	Spiral	100,0	102,75	100,0	121,5	100,0	137,5	100,0	121,5
11	Thyroid	96,76	95,25	97,66	68,5	96,29	96,5	97,22	108,5
12	Twonorm	94,99	5448	95,47	823,7	94,69	5531	95,84	5384
13	Waveform	77,48	3220	82,12	322,7	78,64	3749	80,12	2757
14	Wine	97,18	39,25	96,05	46,25	94,37	74,50	97,17	27,00
15	Yeast	50,20	859,5	50,61	738,7	52,83	913,5	53,77	663,0
16	Zelnik6	99,58	59,00	99,58	26,00	99,58	45,25	99,58	34,50
	<b>Среднее значение</b>	<b>90,38</b>	<b>878,0</b>	<b>90,44</b>	<b>266,5</b>	<b>89,89</b>	<b>971,8</b>	<b>90,90</b>	<b>769,3</b>
	<b>Средний ранг</b>	<b>2,6</b>	<b>2,6</b>	<b>2,4</b>	<b>1,7</b>	<b>2,2</b>	<b>3,6</b>	<b>2,9</b>	<b>1,9</b>

Критерий суммы рангов Фридмана не выявил статистические различия в точности этих классификаторов на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  ( $p$ -value = 0,406). Причем данные работы [21] (см. табл. 2) для этого же набора классификаторов показывают статистическое различие ( $p$ -value = 0,00054). Это еще раз подтверждает тезис о том, что результаты сравнения также зависят от выбранных для сравнения наборов данных. Критерий суммы рангов Фридмана показал статистические различия в количестве гипербоксов этих классификаторов на уровне значимости  $\alpha = 0,05$

( $p$ -value < 0,0001). Лучшим классификатором с минимальным количеством гипербоксов оказался GFMM (средний ранг 1,7), а с наибольшим количеством гипербоксов – EFMM (средний ранг 3,6).

Также в данной работе приведены сравнения точностей классификации с такими популярными классификаторами, как деревья решений, метод опорных векторов,  $k$ -ближайших соседей, и наивным байесовским классификатором. Статистические сравнения показали, что есть различия в производительности классификаторов Min-Max и популярных

алгоритмов машинного обучения на этих 16 наборах экспериментальных данных. Причем средний ранг оказался выше у метода опорных векторов и алгоритма k-ближайших соседей, и ниже у деревьев решений и метода опорных векторов. Данные результаты говорят, что точность классификатора Min-Max вполне конкурентна с популярными классификаторами.

#### Использование в реальных задачах

Классификатор FMM и его модификации нашли широкое применение для решения реальных прикладных задач. Применение в медицине обнаружено в следующих работах. В [24] классификатор EFMM использовался для диагностики болезни Паркинсона. Признаки извлекались из аудиозаписей голоса пациентов и передавались на обработку классификатору. Результаты продемонстрировали высокую точность классификации по сравнению с аналогичными моделями. Диагностику заболеваний печени, связанных с нарушением ферментов, проводили с помощью FMM в работе [25]. Классификация гистопатологических изображений для диагностики рака молочной железы с помощью FMM проводилась в [26]. Классификатор с компенсаторной нейронной архитектурой FMCN применялся в [27] для обнаружения легочных узлов на изображениях рентгеновской компьютерной томографии легких. В [28] рассматривалась классификация нормальных и аномальных эндокринных тканей по магнитно-резонансной томографии головного мозга.

Использование нечетких классификаторов Min-Max в области кибербезопасности было в следующих исследованиях. В [29] FMM использовался для обнаружения сетевых атак и классификации их намерений, а именно: нарушений конфиденциальности, доступности, целостности и аутентичности. Аутентификация субъекта по динамической рукописной подписи с помощью классификатора с компенсаторной нейронной архитектурой FMCN проводилась в [30].

Для решения экономических задач в [31] применялся метаэвристический алгоритм птичьего роя и FMM. Проводился прогноз финансового состояния организации. Процесс классификации выполнялся с использованием модели FMM, а параметры гипербоксов настраивались с использованием метаэвристики. Прогнозирование объема торгов на бирже, ежедневных цен на акции и ежедневная доходность по облигации исследовались в [32]. Для этого был задействован ансамбль деревьев решений и FMM.

Применение FMM в промышленности приведено в [33] для диагностики неисправностей в шарикоподшипниках, в [34–36] – для обнаружения неисправностей в асинхронных двигателях, в [37–39] – для выявления неисправностей в трубопроводах, в [40, 41] – для оценки качества генерируемой электроэнергии.

#### Анализ результатов обзора и выводы

Обзор классификатора FMM и его модификаций показал, что данная модель является весьма полезным инструментом классификации с инкрементальной парадигмой обучения, которая требует однопроходной процедуры через экземпляры данных.

Данный классификатор обладает такими важными свойствами, как адаптация в режиме онлайн, нелинейная граница делимости между признаковыми пространствами классов, получение мягких и жестких решений классификации, интерпретируемость полученных результатов и быстрое время обучения.

Адаптация классификатора обеспечивает изучение новых экземпляров данных без потери информации, извлеченной из предыдущих экземпляров. FMM не подвержен катастрофическому забыванию, также известному как дилемма стабильности-пластичности, в отличие от популярных нейронных сетей. Данный недостаток нейронных сетей связан с неспособностью классификатора сохранять предыдущую информацию, полученную на старых обучающих данных, когда новые данные обрабатываются этим классификатором.

Свойства нелинейной делимости позволяют FMM построить произвольную нелинейную границу решения с произвольной степенью точности для разделения экземпляров данных разных классов. Получение мягких решений в виде степени принадлежности классам позволяет шире анализировать полученные результаты и исследовать предметную область. И, наконец, интерпретируемость полученных результатов позволяет объяснить человеку результат своего решения. Это происходит с помощью наличия базы правил, на основании которой осуществляется вывод. Благодаря наличию данного свойства обеспечивается доверие к работе классификатора.

Классический FMM, предложенный Симпсоном, имеет проблемы, связанные с процессом обучения, которые некоторые исследователи пытались устранить. К таким проблемам относятся: излишнее удаление части гипербоксов в процессе сжатия, увеличение перекрывающихся областей гипербоксов разных классов после растяжения, невозможность обнаружить все случаи перекрытия. Для устранения этих недостатков были предложены модифицированные варианты классификатора. Как оригинальный, так и модифицированный классификатор достигают точности, сопоставимой с популярными моделями классификации. Несмотря на это, остались некоторые существенные недостатки, а именно:

1. Все варианты FMM требуют вмешательства пользователя, чтобы указать максимальный размер гипербокса для обучения. Этот параметр влияет на процесс формирования гипербокса, что, в свою очередь, сказывается на восприимчивости к ошибочной классификации. Предложенные варианты нахождения параметра предполагают несколько проходов по обучающим данным, что приводит к потере свойства однопроходной адаптивности.

2. Полученные классификаторы содержат большое количество правил во всех вариантах модификаций FMM, порой до тысяч. Это негативно сказывается на интерпретируемости моделей, а именно анализе моделируемого процесса или явления.



3. Варианты FMM, выполняющие процесс сжатия, страдают от неоднозначности принадлежности к перекрывающимся областям и проблем с искажением данных. Экземпляр данных, попадающий в перекрывающуюся граничную область гипербоксов разных классов, имеет максимальную степень принадлежности 1 для этих классов и не может быть однозначно классифицирован.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 22-21-00021.

#### Литература

- Hastie T. The elements of statistical learning / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – Switzerland: Springer, 2020. – 764 p.
- Bengio Y. Deep learning for AI / Y. Bengio, Y. LeCun, G.E. Hinton // Communications of the ACM. – 2021. – Vol. 64. – PP. 58–65.
- Bappy J.H. Online adaptation for joint scene and object classification / J.H. Bappy, S. Paul, A.K. Roy-Chowdhury // Computer Vision – ECCV 2016. ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science. – 2016. – Vol. 9912. – PP. 227–243.
- Gheibi O. Lifelong self-adaptation: self-adaptation meets lifelong machine learning / O. Gheibi, D. Weyns // SEAMS '22: Proceedings of the 17th Symposium on Software Engineering for Adaptive and Self-Managing Systems, May 2022. – 2022. – PP. 1–12.
- McCloskey M. Catastrophic interference in connectionist networks: the sequential learning problem / M. McCloskey, N. J. Cohen // Psychology of Learning and Motivation. – 1989. – Vol. 24. – PP. 109–165.
- Ridley M. Explainable artificial intelligence (XAI) // Information Technology and Libraries. – 2022. – Vol. 41, No. 2. – PP. 1–17.
- Cheng Y. Rule extraction based on granulation order in interval-valued fuzzy information system / Y. Cheng, D. Miao // Expert Systems with Applications. – Vol. 8, No. 10. – PP. 12249–12261.
- Simpson P.K. Fuzzy Min-Max neural networks. Part 1: Classification // IEEE Transaction on Neural Networks. – 1992. – Vol. 3, No. 5. – PP. 776–786.
- Bargiela A. An inclusion/exclusion fuzzy hyperbox classifier / A. Bargiela, W. Pedrycz, M. Tanaka // International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems. – 2004. – Vol. 8. – PP. 91–98.
- Nandedkar A.V. A Fuzzy Min-Max neural network classifier with compensatory neuron architecture / A.V. Nandedkar, P.K. Biswas // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2007. – Vol. 18, No. 1. – PP. 42–54.
- Zhang H. Data-core-based fuzzy min-max neural network for pattern classification / H. Zhang, J. Liu, D. Ma, Z. Wang // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2011. – Vol. 22, No. 12. – PP. 2339–2352.
- Davtalab R. Multi-level fuzzy min-max neural network classifier / R. Davtalab, M.H. Dezfoulian, M. Mansoorizadeh // IEEE Transactions on Neural Networks Learning System. – 2014. – Vol. 25, No. 3. – PP. 470–482.
- Gabrys B. General fuzzy min-max neural network for clustering and classification / B. Gabrys, A. Bargiela // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2000. – Vol. 11, No. 3. – PP. 769–783.
- Nandedkar A.V. A general reflex fuzzy min-max neural network / A.V. Nandedkar, P.K. Biswas // Engineering Letters. – 2007. – Vol. 14, No. 1. – PP. 195–205.
- Mohammed M.F. An enhanced fuzzy min-max neural network for pattern classification / M.F. Mohammed, C.P. Lim // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2017. – Vol. 26. – PP. 417–429.
- Mohammed M.F. Improving the fuzzy min-max neural network with a K-nearest hyperbox expansion rule for pattern classification / M.F. Mohammed, C.P. Lim // Appl. Soft Comput. – 2017. – No. 52. – PP. 135–145.
- Kumar S. A compact fuzzy min max network with novel trimming strategy for pattern classification / S. Kumar, A. Kumar, V. Bajaj, G.K. Singh // Knowledge-Based Systems. – 2022. – No. 246. – P. 108620.
- Alhroob E. Fuzzy min-max classifier based on new membership function for pattern classification: A conceptual solution / E. Alhroob, N.A. Ghani // Proc. 8th IEEE Int. Conf. Control Syst., Comput. Eng. (ICCSCE). – 2018. – PP. 131–135.
- Azad C. A novel fuzzy min-max neural network and genetic algorithm-based intrusion detection system. / C. Azad, V.K. Jha // Proceedings of the second international conference on computer and communication technologies. – 2016. – PP. 429–439.
- Azad C. Fuzzy min-max neural network and particle swarm optimization based intrusion detection system / C. Azad, V.K. Jha // Microsystem Technology. – 2017. – Vol. 23, No. 4. – PP. 907–918.
- Khuat T.T. Random hyperboxes / T.T. Khuat, B. Gabrys // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2023. – Vol. 34, No. 2. – PP. 1008–1022.
- Huang W. Deep Fuzzy Min-Max Neural Network: Analysis and Design / W. Huang, M. Sun, L. Zhu, S.-K. Oh, W. Pedrycz // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2022. – Vol. 33, No. 12. – PP. 1–12.
- Khuat T.T. A comparative study of general fuzzy min-max neural networks for pattern classification problems / T.T. Khuat, B. Gabrys // Neurocomputing. – 2020. – Vol. 386. – PP. 110–125.
- Al Sayaydeha O.N. Diagnosis of the Parkinson disease using enhanced fuzzy Min-Max neural network and OneR attribute evaluation method / O.N. Al. Sayaydeha, M.F. Mohammad // 2019 International Conference on Advanced Science and Engineering (ICOASE), Zakho-Duhok, Iraq. – 2019. – PP. 64–69.
- The combination of fuzzy Min-Max neural network and semi-supervised learning in solving liver disease diagnosis support problem / T.N. Tran, D.M. Vu, M.T. Tran, B.D. Le // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2019. – Vol. 44. – PP. 2933–2944.
- A fuzzy Min-Max neural network based classification of histopathology images / S.A. Kumar, A. Kumar, V. Bajaj, G.K. Singh, B. Kuldeep // 2019 International Conference on Signal Processing and Communication (ICSC), NOIDA, India. – 2019. – PP. 143–146.
- Computer-aided detection of lung nodules with fuzzy Min-Max Neural network for false positive reduction / Z. Zhai, D. Shi, Y. Cheng, H. Guo // 2014 Sixth International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, Hangzhou, China. – 2014. – PP. 66–69.
- Bangare S.L. Classification of optimal brain tissue using dynamic region growing and fuzzy min-max neural network in brain magnetic resonance images // Neuroscience Informatics. – 2022. – Vol. 2, No. 3. – P. 100019.
- Abdulghani A.A. SAIRF: A similarity approach for attack intention recognition using fuzzy min-max neural network / A.A. Abdulghani, M.F. Mohammed // Journal of Computational Science. – 2018. – Vol. 25. – PP. 467–473.
- Online signature classification using modified fuzzy Min-Max neural network with compensatory neuron topology / B.M. Chaudhari, R.S. Patil, K.P. Rane, U.B. Shinde // Contemporary Computing. IC3 2010. Communications in Computer and Information Science. – 2010. – Vol. 94. – PP. 467–478.

31. Bird swarm algorithm with fuzzy Min-Max neural network for financial crisis prediction / K.P.M. Kumar, S. Dhanasekaran, I.S.H. Punithavathi, P. Durairandy, A.K. Dutta, I.V. Pustokhina, D.A. Pustokhin // *Computers, Materials & Continua*. – 2022. – Vol. 73, No. 1. – PP. 1541–1555.

32. Seera M. Improving the fuzzy min-max neural network performance with an ensemble of clustering trees / M. Seera, K. Randhawa, C.P. Lim // *Neurocomputing*. – 2018. – Vol. 275. – PP. 1744–1751.

33. Seera M. Classification of ball bearing faults using a hybrid intelligent model / M. Seera, M.L.D. Wong, A.K. Nandi // *Applied Soft Computing*. – 2017. – Vol. 57. – PP. 427–435.

34. Seera M. Online motor fault detection and diagnosis using a hybrid FMM-CART model / M. Seera, C.P. Lim // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. – 2014. – Vol. 25. – PP. 806–812.

35. Liu J. Semi-supervised fuzzy min-max neural network for data classification / J. Liu, Y. Ma, F. Qu, D. Zang // *Neural Processing Letters*. – 2020. – Vol. 51. – PP. 1445–1464.

36. A hybrid model of fuzzy min-max and brain storm optimization for feature selection and data classification / F. Pourpanaha, C.P. Lim, X. Wang, C.J. Tand, M. Seerae, Y. Shi // *Neurocomputing*. – 2019. – Vol. 333. – PP. 440–451.

37. A modified fuzzy min-max neural network for data clustering and its application on pipeline internal inspection data / J. Liu, Y. Ma, H. Zhang, H. Su, G. Xiao // *Neurocomputing*. – 2017. – Vol. 238. – PP. 56–66.

38. Evolved fuzzy min-max neural network for new-labeled data classification / Y. Ma, J. Liu, F. Qu, H. Zhu // *Applied Intelligence*. – 2022. – Vol. 52. – PP. 305–320.

39. Ma Y. Evolved fuzzy min-max neural network for unknown labeled data and its application on defect recognition in depth / Y. Ma, J. Liu, Y. Zhao // *Neural Processing Letters*. – 2021. – Vol. 53. – PP. 85–105.

40. A modified fuzzy min-max neural network for data clustering and its application to power quality monitoring / M. Seera, C.P. Lim, C.K. Loo, H. Singh // *Applied Soft Computing*. – 2015. – Vol. 28. – PP. 19–29.

41. Power quality analysis using a hybrid model of the fuzzy min-max neural network and clustering tree / M. Seera, C.P. Lim, C.K. Loo, H. Singh // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. – 2016. – Vol. 27. – PP. 2760–2767.

ing models based on fuzzy Min-Max classifiers. The architecture of the classifier and the principle of its operation are presented. A review of the modifications of the classifier is carried out and their effectiveness is evaluated. Applications of the classifier and its modifications in solving real problems are indicated. In conclusion, statements are drawn about the work of the classifier and the problems that have remained unresolved.

**Keywords:** machine learning, fuzzy classifier, data analysis, classifier adaptation.

**DOI:** 10.21293/1818-0442-2023-26-1-65-75

### References

1. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The elements of statistical learning*. Switzerland, Springer, 2020, 764 p.

2. Bengio Y., LeCun Y., Hinton G.E. Deep learning for AI. *Communications of the ACM*, 2021, vol. 64, pp. 58–65.

3. Bappy J.H., Paul S., Roy-Chowdhury A.K. Online adaptation for joint scene and object classification. *Computer Vision – ECCV 2016. ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science*, 2016, vol. 9912, pp. 227–243.

4. Weyns D., Gheibi O. Lifelong self-adaptation: self-adaptation meets lifelong machine learning. *SEAMS '22: Proceedings of the 17th Symposium on Software Engineering for Adaptive and Self-Managing Systems*, May 2022, pp. 1–12.

5. Cohen N.J., McCloskey M. Catastrophic interference in connectionist networks: the sequential learning. *Psychology of Learning and Motivation*, 1989, vol. 24, pp. 109–165.

6. Ridley M. Explainable artificial intelligence (XAI). *Information Technology and Libraries*, 2022, vol. 41, no. 2, pp. 1–17.

7. Cheng Y., Miao D. Rule extraction based on granulation order in interval-valued fuzzy information. *Expert Systems with Applications*, vol. 8, no. 10, pp. 12249–12261.

8. Simpson P.K. Fuzzy Min-Max neural networks – Part 1: Classification. *IEEE Transaction on Neural Networks*, 1992, vol. 3, no 5, pp. 776–786.

9. Bargiela A., Pedrycz W., Tanaka M. An inclusion/exclusion fuzzy hyperbox classifier. *International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems*, 2004, vol. 8, pp. 91–98.

10. Nandedkar A.V., Biswas P.K. A Fuzzy Min-Max neural network classifier with compensatory neuron architecture. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, vol. 18, no. 1, pp. 42–54.

11. Zhang H., Liu J., Ma D., Z. Wang. Data-core-based fuzzy min-max neural network for pattern classification. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, vol. 22, no. 12, pp. 2339–2352.

12. Davtalab R., Dezfulian M.H., Mansoorzadeh M. Multi-level fuzzy min-max neural network classifier. *IEEE Transactions on Neural Networks Learning System*, 2014, vol. 25, no. 3, pp. 470–482.

13. Gabrys B., Bargiela A. General fuzzy min-max neural network for clustering and classification. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2000, vol. 11, no. 3, pp. 769–783.

14. Nandedkar A.V., Biswas P.K. A general reflex fuzzy min-max neural network. *Engineering Letters*, 2007, vol. 14, no. 1, pp. 195–205.

15. Mohammed M.F., Lim C.P. An enhanced fuzzy min-max neural network for pattern classification. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, vol. 26, pp. 417–429.

16. Mohammed M.F., Lim C.P. Improving the fuzzy min-max neural network with a K-nearest hyperbox expansion rule for pattern classification. *Applied Soft Computing*, 2017, no. 52, pp. 135–145.

### Сарин Константин Сергеевич

Канд. техн. наук, доцент, доцент  
каф. компьютерных систем в управлении и проектировании  
(КСУП) Томского государственного ун-та  
систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)  
Ленина пр-т, 40, г. Томск, Россия, 634050  
ORCID: 0000-0003-3264-7768  
Тел.: +7 (382-2) 41-47-17  
Эл. почта: konstantin.s.sarin@tusur.ru

Sarin K.S.

### Fuzzy Min-Max Classifier: Review

Online adaptation and interpretability have become one of the important requirements for machine learning models. Popular models such as artificial neural networks cannot fully implement them. Fuzzy classifiers of the Min-Max type are interpretable, thanks to the underlying fuzzy logic theory, and adaptable with the advent of new information. This article presents a comprehensive literature review on machine learn-

17. Kumar S., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K. A compact fuzzy min max network with novel trimming strategy for pattern classification. *Knowledge-Based Systems*, 2022, no. 246, pp. 108620.
18. Alhroob E., Ghani N.A. Fuzzy min-max classifier based on new membership function for pattern classification: A conceptual solution. *Proceedings of the VIII IEEE International Conference Control System, Computer Engendering (ICCSCE)*, 2018, pp. 131–135.
19. Azad C. Jha V.K. A novel fuzzy min-max neural network and genetic algorithm-based intrusion detection system. *Proceedings of the II international Conference on Computer and Communication Technologies*, 2016, pp. 429–439.
20. Azad C., Jha V.K. Fuzzy min-max neural network and particle swarm optimization based intrusion detection system. *Microsystem Technology*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 907–918.
21. Khuat T.T., Gabrys B. Random hyperboxes. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, vol. 34, no. 2, pp. 1008–1022.
22. Huang W., Sun M., Zhu L., Oh S.-K., Pedrycz W. Deep Fuzzy Min-Max Neural Network: Analysis and Design. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, vol. 33, no. 12, pp. 1–12.
23. Khuat T.T., Gabrys B. A comparative study of general fuzzy min-max neural networks for pattern classification problems. *Neurocomputing*, 2020, vol. 386, pp. 110–125.
24. Al Sayaydeha O.N., Mohammed M.F. Diagnosis of the Parkinson disease using enhanced fuzzy Min-Max neural network and OneR attribute evaluation method. *Proceedings of 2019 International Conference on Advanced Science and Engineering (ICOASE)*, Iraq, 2019, pp. 64–69.
25. Tran T.N., Vu D.M., Tran M.T., Le B.D. The combination of fuzzy Min-Max neural network and semi-supervised learning in solving liver disease diagnosis support problem. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2019, vol. 44, pp. 2933–2944.
26. Kumar S.A., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K., Kuldeep B. A fuzzy Min-Max neural network based classification of histopathology images. *Proceedings of 2019 International Conference on Signal Processing and Communication (ICSC)*, NOIDA, India, 2019, pp. 143–146.
27. Zhai Z., Shi D., Cheng Y., Guo H. Computer-aided detection of lung nodules with fuzzy Min-Max Neural network for false positive reduction. *Proceedings of the VI International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics- 2014*, Hangzhou, China, 2014, pp. 66–69.
28. Bangare S.L. Classification of optimal brain tissue using dynamic region growing and fuzzy min-max neural network in brain magnetic resonance images. *Neuroscience Informatics*, 2022, vol. 2, no. 3, pp. 100019.
29. Abdulghani A.A., Mohammed M.F. SAIRF: A similarity approach for attack intention recognition using fuzzy min-max neural network. *Journal of Computational Science*, 2018, vol. 25, pp. 467–473.
30. Chaudhari B.M., Patil R.S., Rane K.P., Shinde U.B. Online signature classification using modified fuzzy Min-Max neural network with compensatory neuron topology. *Communications in Computer and Information Science*, 2010, vol. 94, pp. 467–478.
31. Kumar K.P.M., Dhanasekaran S., Punithavathi I.S.H., Duraipandy P., Dutta A.K., Pustokhina I.V., Pustokhin D.A. Bird swarm algorithm with fuzzy Min-Max neural network for financial crisis prediction. *Computers, Materials & Continua*, 2022, vol. 73, no. 1, pp. 1541–1555.
32. Seera M., Randhawa K., Lim C.P. Improving the fuzzy min-max neural network performance with an ensemble of clustering trees. *Neurocomputing*, 2018, vol. 275, pp. 1744–1751.
33. Seera M., Wong M.L.D., Nandi A.K. Classification of ball bearing faults using a hybrid intelligent model. *Applied Soft Computing*, 2017, vol. 57, pp. 427–435.
34. Seera M., Lim C.P. Online motor fault detection and diagnosis using a hybrid FMM-CART model. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, vol. 25, pp. 806–812.
35. Liu J., Ma Y., Qu F., Zang D. Semi-supervised fuzzy min-max neural network for data classification. *Neural Processing Letters*, 2020, vol. 51, pp. 1445–1464.
36. Pourpanaha F., Lim C.P., Wang X., Tand C.J., Seerae M., Shi Y. A hybrid model of fuzzy min-max and brain storm optimization for feature selection and data classification. *Neurocomputing*, 2019, vol. 333, pp. 440–451.
37. Liu J., Ma Y., Zhang H., Su H., Xiao G. A modified fuzzy min-max neural network for data clustering and its application on pipeline internal inspection data. *Neurocomputing*, 2017, vol. 238, pp. 56–66.
38. Ma Y., Liu J., Qu F., Zhu H. Evolved fuzzy min-max neural network for new-labeled data classification. *Applied Intelligence*, 2022, vol. 52, pp. 305–320.
39. Ma Y., Liu J., Zhao Y. Evolved fuzzy min-max neural network for unknown labeled data and its application on defect recognition in depth. *Neural Processing Letters*, 2021, vol. 53, pp. 85–105.
40. Seera M., Lim C.P., Loo C.K., Singh H. A modified fuzzy min-max neural network for data clustering and its application to power quality monitoring. *Applied Soft Computing*, 2015, vol. 28, pp. 19–29.
41. Seera M., Lim C.P., Loo C.K., Singh H. Power quality analysis using a hybrid model of the fuzzy min-max neural network and clustering tree. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, vol. 27, pp. 2760–2767.

---

**Konstantin S. Sarin**

Candidate of Science in Engineering, Associate Professor, Department of Computer Systems in Control and Design, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR) 40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050  
ORCID: 0000-0003-3264-7768  
Phone: +7 (382-2) 41-47-17  
Email: konstantin.s.sarin@tusur.ru