УДК 519.111.3+004.823

Д.В. Кручинин

База знаний коэффициентов k-степени производящих функций двух переменных

Рассматриваются вопросы построения базы знаний коэффициентов степеней производящих функций двух переменных, явные выражения которых описываются алгеброй биномиальных коэффициентов. Предлагается методика получения таких выражений. Описывается структура элементов базы знаний. Представлена структура программной системы. Описаны примеры.

Ключевые слова: производящая функция, коэффициент, числовая пирамида, база знаний, методика получения пирамид, программная система.

DOI: 10.21293/1818-0442-2021-24-4-85-89

Развитие систем компьютерной алгебры требует создания математических баз знаний, позволяющих организовать поиск и манипулирование сложными математическими объектами. Производящие функции являются одним из таких объектов, которые находят применение в различных прикладных математических дисциплинах: перечислительная комбинаторика, статистика, теория чисел, комбинаторная генерация, теория ортогональных полиномов, анализа алгоритмов и т.д.

Существующие базы знаний направлены на получение новых знаний конкретных чисел или последовательностей чисел, например, можно выделить www.worldofnumbers.com [1] или oeis.org [2–4]. В системах компьютерной алгебры имеются программные модули для работы с производящими функциями. Однако они имеют ограниченные возможности по выполнению операций нахождения явных выражений композиции, обращения производящих функций и решения функциональных уравнений. Для выполнения операции композиции производящих функций одной переменной известна реализация модуля в системе Maxima [5]. Однако выполнение указанных операций для производящих функций многих переменных не реализовано.

Недавние исследования математического аппарата композиции производящих функций многих переменных [7–12] позволили решить указанные задачи по получению явных выражений коэффициентов производящих функций многих переменных и найти подходы и алгоритмы для реализации этой операции в системах компьютерной алгебры. Важнейшее значение при выполнении этих операций играют коэффициенты *k*-степени производящих функций многих переменных. Первым шагом в этом направлении является создание соответствующей базы знаний для производящих функций одной и двух переменных и их коэффициентов *k*-степени, описываемых алгеброй биномиальных коэффициентов.

Основные понятия и методы

Переход на исследование коэффициентов степеней производящих функций многих переменных открыл новые возможности для решения задач, основанных на применении композиции производящих функций многих переменных и решения смежных задач. Для описания численного представления коэффициентов *k*-степени производящих функций двух переменных воспользуемся понятием тензора как многомерной таблицы [6].

Запишем основные соотношения для коэффициентов степеней производящих функций двух переменных.

Пусть задана производящая функция вида

$$U_{num}(x,y)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}u(n,m)x^n y^m.$$

Тогда пирамидой будем называть трехмерный тензор, формируемый выражением

$$T_{num}(n,m,k)=[x^n y^m]U_{num}(x,y)^k,$$

где $T_{num}(n,m,k)$ описывается выражением, состоящим из произведения или деления биномиальных коэффициентов, а также рациональных выражений, состоящих из переменных *n*, *m*, *k* и констант. Например, для производящей функции

$$U(x,y)=\frac{1}{1-x-y}$$

описываемая ею пирамида будет задана формулой

$$T(n,m,k)=[x^n y^m]U(x,y)^k=\binom{n+m}{n}\binom{n+m+k-1}{n+m}.$$

Производящая функция для тензора $T(n,m,k)$ будет иметь вид

$$F(x,y,z)=\sum_{n,m,k}T(n,m,k)x^n y^m z^k=\frac{1}{1-zU(x,y)}.$$

Для всех пирамид выполняются условия:

$$T(0,0,0)=1,\quad m=0,n=0,$$
$$T(n,m,0)=0,\quad m>0,n>0,$$
$$T(n,m,k)=0,\quad m<0 \text{ или } n<0 \text{ или } k<0.$$

Пирамида является коэффициентами *k*-степени производящей функции *U*(*x*,*y*). Тогда для пирамиды можно записать рекуррентное выражение вида

$$T(n,m,k)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}T(i,j,k-1)u\left(n-i,m-j\right).$$

Основные соотношения для пирамид

Пусть задана взаимная производящая функция

$$U_r(x,y)=\frac{1}{U(x,y)},$$

где известна пирамида $T_{num}(n,m,j)$. Тогда пирамида для взаимной функции будет иметь выражение [12]

$$T_r(n,m,k)=\sum_{j=0}^{n+m}U_0^{-k-j}(-1)^j\binom{k+j-1}{j}T_U(n,m,j)\binom{n+m+k}{n+m-j},$$

где $U_0=U(0,0)$.

На основании использования теоремы Лагранжа об обращении рядов двух переменных [13, 14] запишем функциональное уравнение

$$A(x,y)=U(xA(x,y),y).$$

Для $U(x,y)$ известна пирамида $T(n,m,k)$. Тогда для пирамиды, описываемой функцией $A(x,y)$, будет справедлива формула

$$T_A(n,m,k)=\frac{k}{n+k}T_U(n,m,n+k),$$

где $T_A(n,m,k)=[x^n y^m]A(x,y)^k$.

Представленные формулы для взаимной и реверсивной пирамид позволяют получить следующую схему отношений между пирамидами:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & T_U(n,m,k) & \rightarrow & T_A(n,m,k) & \rightarrow \\ & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \leftarrow & T_U^R(n,m,k) & \leftarrow & T_A^R(n,m,k) & \leftarrow \end{array}$$

Пусть задано уравнение реверсии

$$A_r(x,y)U(xA_r(x,y),y)=x.$$

Тогда

$$T_{rev}(n,m,k)=\frac{k}{n+k}\sum_{j=0}^{n+m}(0,0,1)^{-n-k-j}(-1)^jT(n,m,j)\times$$
$$\times T\binom{n+k+j-1}{j}\binom{2n+m+k}{n+m-j}.$$

Аналогично будет выражение для реверсии по переменной y:

$$yA_r(x,y)U(x,yA_r(x,y))=y.$$

Реверсивная пирамида будет иметь вид

$$T_{rev}(n,m,k)=\frac{k}{m+k}\sum_{j=0}^{n+m}U_0^{-m-k-j}(-1)^jT(n,m,j)\times$$
$$\times\binom{m+k+j-1}{j}\binom{2m+n+k}{n+m-j}.$$

Взаимная рекурсивная пирамида по переменной x задается уравнением

$$\frac{x}{A_r(x,y)U(xA_r(x,y),y)}=x.$$

Тогда пирамида описывается следующей формулой:

$$T_{rrx}(n,m,k)=k\sum_{j=1}^{n+m}\frac{U_0^{-n+k-j}}{j}(-1)^{j-1}T(n,m,j)\times$$
$$\times\binom{n-k+j-1}{j-1}\binom{2n+m-k}{n+m-j},$$

где $U_0=U(0,0), T_{rrx}(0,0,k)=T(0,0,k), k>0.$

Методика получения пирамид

Рассмотрим методику получения пирамид. Для этого запишем множество производящих функций одной переменной и соответствующее множество явных выражений коэффициентов k-степени. Пусть имеется множество $G=\{g_i(x)\}_{i=1}^N$ производящих функций. Коэффициенты k-степени описываются биномиальными коэффициентами, представленными треугольниками $\{T_i(n,k)\}_{i=1}^N$. Пример такого множества приведен в таблице. Необходимо отметить, что данная таблица существенно ограничена и используется в качестве примера. Выбираем $g_1(x)\in G$ и $g_2(x)\in G$ и строим новую функцию двух переменных. Можно предложить два способа получения пирамид производящей функции двух переменных:

1. На основе произведения и композиции производящих функций $g_1(x)\in G$ и $g_2(x)\in G$;

2. На основе решения уравнения Лагранжа для функций $g_1(x)\in G$ и $g_2(x)\in G$.

Рассмотрим первый метод получения пирамид. Выбираем $g_1(x)\in G$ и $g_2(x)\in G$ и строим новую производящую функцию двух переменных вида

$$U(x,y)=g_1(x\cdot g_2(y)).$$

Тогда пирамида функции $U(x,y)$ будет иметь выражение

$$T_U(n,m,k)=T_1(n,k)\cdot T_2(m,n).$$

В общем случае можно записать функцию

$$U(x,y)=g_1(x\cdot g_2(y)^a)^b g_2(y)^c,$$

где $a,b,c\in N$.

Тогда пирамида функции $U(x,y)$ будет иметь выражение

$$T_U(n,m,k)=T_1(n,bk)\cdot T_2(m,an+ck).$$

Рассмотрим второй метод, основанный на уравнении Лагранжа. Выбираем $g_1(x)\in G$ и $g_2(x)\in G$. Записываем уравнение общего вида

$$U(x,y)=g_1{}^a\left(xU(x,y)g_2{}^b(y)\right)g_2{}^c(y),$$

где $a,b,c\in N$.

Тогда

$$T_U(n,m,k)=\frac{k}{n+k}T_1(n,a(n+k))\cdot T_2(m,bn+c(n+k)).$$

Как видим, можно получить неограниченное число пирамид. Однако, ограничив параметры a,b,c, получим фиксированное число пирамид.

Структура системы поддержки базы знаний

База знаний производящих функций, их коэффициентов и тензорных представлений имеет следующую структуру:

1) десятичный четырехзначный номер производящей функции;

2) явное выражение производящей функции;

3) явное выражение тензора производящей функции;

4) программа генерации представления выражения производящей функции в формате Latex;

5) программа генерации представления выражения производящей функции в формате Maxima;

6) программа генерации представления выражения тензора в формате Latex;

7) программа генерации представления выражения тензора функции в формате Maxima;

8) URL-ссылки на последовательности онлайн-энциклопедии целых последовательностей;

9) ссылки на другие производящие функции.

Множество производящих функций и их тензоры

Производящая функция $G(x)$	Треугольник $T(n,k)$
$g_1(x)=1+x$	$T(n,k)=\binom{k}{n}$
$g_2(x)=\frac{1}{1-x}$	$T(n,k)=\binom{n+k-1}{n}$
$g_3(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$	$T(n,k)=\frac{k}{n+k}\binom{2n+k-1}{n}$
$g_4(x,y)=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$	$T(n,k)=\frac{k(-1)^{n-1}\binom{2n-k-1}{n-1}}{n}$
$g_5(x)=\frac{2}{\sqrt{3x}}\sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{27x}}{2}\right)}{3}\right)$	$T(n,k)=\frac{k\binom{3n+k-1}{n}}{2n+k}$
$g_6(x)=\left(\frac{\sqrt{x(27x+4)}}{23^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{2}+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{9\left(\frac{\sqrt{x(27x+4)}}{23^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{2}+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{3}$	$T(n,k)=\frac{k(-1)^{n-1}\binom{3n-k-1}{n-1}}{n}$
$g_7(x)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16x}}{8x}}$	$T(n,k)=\begin{cases}\frac{k4^n\binom{\frac{4n+k}{2}-1}{n}}{2n+k}, & k\ even,\\ \frac{k\binom{\frac{4n+k-1}{2}}{n}\binom{4n+k-1}{\frac{4n+k-1}{2}}}{(2n+k)\binom{2n+k-1}{\frac{2n+k-1}{2}}}, & k\ odd.\end{cases}$

На рис. 1 представлена структура программной системы поддержки базы знаний коэффициентов *k*-степени производящих функций двух переменных. Рассмотрим описание модулей системы.

1. Модуль управления базой пирамид обеспечивает ввод / редактирование данных и программ пирамиды.

2. Модуль поиска запроса производит синтаксический анализ запроса пользователя, при неверном запросе формирует сообщение об ошибке, при верном запросе производит его преобразование для дальнейшей обработки, поиск подходящей пирамиды в базе знаний и формирует список пирамид. Если в результате поиска список пуст, то формируется соответствующее сообщение.

3. Модуль определения отношений для заданной пирамиды производит вычисление взаимной, инверсной, реверсной и обратной инверсной пирамид и поиск их в базе знаний. Кроме того, он вычисляет свойства пирамиды, такие как симметрия.

4. Модуль тестирования и редактирования производит по запросу пользователя редактирование элементов базы знаний и их тестирование. Производится два вида тестирования:

1) проверка на дублирование элементов базы знаний, дублирование не допустимо;

2) проверка на соответствие производящей функции и ее тензора, проверка производится следующим образом: *k*-степень производящей функции разлагается в ряд Тейлора, извлекаются значения

коэффициентов и записываются в соответствующий тензору массив, затем производится вычисление тензора по явной формуле и сравниваются два полученных тензора.

5. Модуль генерации производит построение энциклопедии производящих функций и их тензоров и записывает их в формате Latex.

Программная реализация данной базы знаний осуществлена на языке системы компьютерной алгебры Maxima, который содержит свыше 600 специальных функций для символьных вычислений и преобразования математических выражений. Разработанная система содержит свыше 6 000 функций и математических выражений. В ходе создания программного обеспечения и создания базы знаний были выявлены программные ошибки в системах компьютерной алгебры Maxima и пакете символьных вычислений Sympy для языка Python.

В настоящее время в базе знаний насчитывается 1 502 производящих функций и их тензорных представлений.

На рис. 2 приведен пример вывода страницы пирамиды под номером 77. На ней отображены:

1) формула производящей функции;

2) явная формула пирамиды $T_{77}(n,m,k)$;

3) таблица разложения производящей функции $U_{77}(x,y)$;

4) ссылки на связанные пирамиды. Здесь левая пирамида под номером 76 и пирамида с переменой мест *x* и *y* под номером 71;

5) текст программ на языке Maxima.

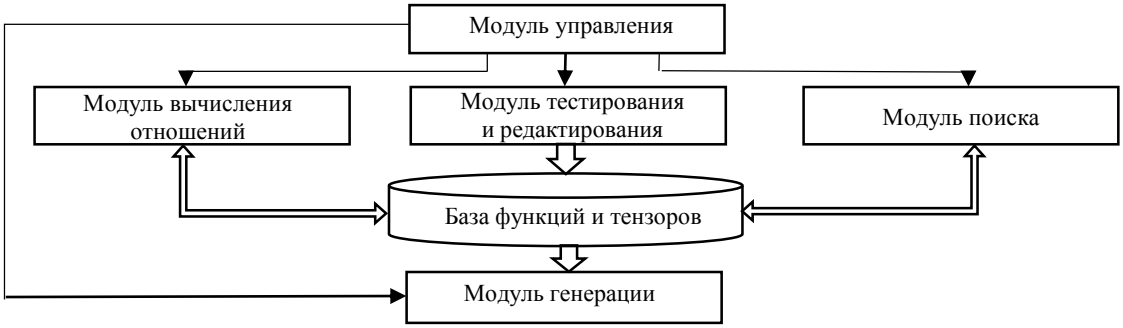

Рис. 1. Структура электронной энциклопедии пирамид

1.2.77 Pyr77

Generating function:

$$U_{77}(x,y)=\frac{1-2x+x^2-\sqrt{1-4x+6x^2-4x^3+x^4-4y}}{2y}$$

Formula:

$$T_{77}(n,m,k)=\frac{k\binom{2m+k-1}{m}\binom{n+2(2m+k)-1}{n}}{m+k}$$

Data:

1	1	2	5	14	42	132
2	6	20	70	252	924	3432
3	21	110	525	2394	10626	46332
4	56	440	2800	15960	85008	432432
5	126	1430	11900	83790	531300	3135132
6	252	4004	42840	368676	2762760	18810792
7	462	10010	135660	1413258	12432420	97189092

Left on y: UU0076(x,y)
Change x y: UU0071(x,y)

(Maxima)	Programm Code
UU0077(x,y):=	((-sqrt((-4*y)+x^4-4*x^3+6*x^2-4*x+1))+x^2-2*x+1) /(2*y)
Tuu0077(n,m,k):=	(k*binomial(2*m+k-1,m)*binomial(n+2*(2*m+k)-1,n)) /(m+k)

Рис. 2. Пример фрагмента вывода информации, описывающей пирамиду 77

Выводы

Построенная база знаний база знаний коэффициентов степеней производящих функций двух переменных станет инструментом проведения теоретических и прикладных исследований в областях перечислительной комбинаторики, комбинаторной генерации, теории специальных полиномов и др. Предложенная база знаний позволит развить возможности систем компьютерной алгебры в части выполнения операций композиции и обращения производящих функций многих переменных. Послужит развитию математического онлайн-образования.

Литература

1. World!Of numbers. – URL: http://www.worldofnumbers.com (дата обращения: 12.02.2022).

2. Sloane N.J.A. A handbook of integer sequences. – USA, New York: Academic Press, 1973. – 206 p.

3. Sloane N.J.A. The encyclopedia of integer sequences / N.J.A. Sloane, S. Plouffe. – USA, San Diego: Academic Press, 1995. – 587 p.

4. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // Notices of the American Mathematical Society. – 2018. – Vol. 65, No. 9. – P. 1063–1074.

5. Перминова М.Ю. Программный модуль получения явных выражений коэффициентов производящих функций, основанных на использовании композиции // Доклады ТУСУР. – 2017. – Т. 20, № 1. – С. 65–69.

6. Оселедец И.В. Рекурсивное разложение многомерных тензоров / И.В. Оселедец, Е.Е. Тыртышников // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 427, № 1. – С. 14–16.

7. Kruchinin D. Method for obtaining coefficients of powers of bivariate generating functions / D. Kruchinin, V. Kruchinin, Y. Shablya // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 4. – Article 428.

8. Kruchinin D.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 404, No. 1. – P. 161–171.

9. Kruchinin V.V. Composita and its properties / V.V. Kruchinin, D.V. Kruchinin // Journal of Analysis & Number Theory. – 2014. – Vol. 2, No. 2. – P. 37–44.

10. Kruchinin D. A method for obtaining generating functions for central coefficients of triangles / D. Kruchinin, V. Kruchinin // Journal of Integer Sequences. – 2012. – Vol. 15, No. 9. – Article 12.9.3.

11. Kruchinin D.V. On solving some functional equations // Advances in Difference Equations. – 2015. – Vol. 2015, No. 1.

12. Kruchinin D.V. Explicit formula for reciprocal generating function and its application / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). – 2019. – Vol. 29, No. 3. – P. 365–372.

13. Gessel I.M. A combinatorial proof of the multivariable Lagrange inversion formula // Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 1987. – Vol. 45, No. 2. – P. 178–195.

14. Stanley R.P. Enumerative combinatorics. – Vol. 2. – USA: Cambridge University Press, 2001. – 595 p.

Кручинин Дмитрий Владимирович
Канд. физ.-мат. наук, доцент каф. компьютерных систем в управлении и проектировании (КСУП)
Томского государственного ун-та систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)
Ленина пр-т, 40, г. Томск, Россия, 634050
ORCID: 0000-0003-3412-432X
Тел.: +7 (382-2) 41-47-17
Эл. почта: kruchinindm@gmail.com

Kruchinin D.V.
Knowledge base for coefficients of k-power on generating functions in two variables

The questions of building a knowledge base of the coefficients of the powers of generating functions in two variables are considered, their explicit expressions are described by the algebra of binomial coefficients. A method to obtain such expressions is proposed. Both the structure of knowledge base elements and the structure for the software system are presented, illustrated with examples.

Keywords: generating function, coefficient, numerical pyramid, knowledge base, method for obtaining pyramids, software system.
DOI: 10.21293/1818-0442-2021-24-4-85-89

References

1. World!Of numbers. Available at: http://www.worldofnumbers.com (Accessed: February 12, 2022).

2. Sloane N.J.A. *A handbook of integer sequences*. USA, New York, Academic Press, 1973, 206 p.

3. Sloane N.J.A., Plouffe S. *The encyclopedia of integer sequences*. USA, San Diego, Academic Press, 1995, 587 p.

4. Sloane N.J.A. The online encyclopedia of integer sequences. *Notices of the American Mathematical Society*, 2018, vol. 65, no. 9, pp. 1063–1074.

5. Perminova M.Yu. [Software module to obtain explicit expressions for generating functions coefficients based on use of composition]. *Proceedings of TUSUR University*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 65–69 (in Russ.).

6. Oseledets I.V., Tyrtyshnikov E.E. [Recursive decomposition of multidimensional tensors]. Proceedings of the Russian Academy of Science, 2009, vol. 427, no. 1, pp. 14–16 (in Russ.).

7. Kruchinin D., Kruchinin V., Shablya Y. Method for obtaining coefficients of powers of bivariate generating functions. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 4, article 428.

8. Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 404, no. 1, pp. 161–171.

9. Kruchinin V.V., Kruchinin D.V. Composita and its properties. *Journal of Analysis & Number Theory*, 2014, vol. 2, no. 2, pp. 37–44.

10. Kruchinin D., Kruchinin V. A method for obtaining generating functions for central coefficients of triangles. *Journal of Integer Sequences*, 2012, vol. 15, no. 9, article 12.9.3.

11. Kruchinin D.V. On solving some functional equations. *Advances in Difference Equations*, 2015, vol. 2015, no. 1.

12. Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. Explicit formula for reciprocal generating function and its application. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, 2019, vol. 29, no. 3, pp. 365–372.

13. Gessel I.M. A combinatorial proof of the multivariable Lagrange inversion formula. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 1987, vol. 45, no. 2, pp. 178–195.

14. Stanley R.P. *Enumerative combinatorics.* Vol. 2. USA, Cambridge University Press, 2001, 595 p.

Dmitry V. Kruchinin
Candidate of Science in Mathematics and Physics, Associated Professor, Department of Computer Control and Design Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR)
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050
ORCID: 0000-0003-3412-432X
Тел.: +7 (382-2) 41-47-17
Email: kruchinindm@gmail.com