

УДК 519.224.22, 519.246.8

А.Е. Барышева, А.С. Марков, А.А. Мицель

Модель оценки долгосрочной корреляции активов портфеля

Представлен новый подход к оценке корреляции приращений активов в портфеле, который позволяет получить оценку долгосрочной корреляции на базе краткосрочной, в том числе в условиях ограниченного количества доступных наблюдений. Данное преимущество подхода дает возможность оценить долгосрочную корреляцию для низколиквидных финансовых инструментов, а также для инструментов, не обладающих длинной историей в силу недавнего присутствия на рынке. В рамках данного исследования была проведена процедура проверки сходимости оценки параметров предлагаемой модели к истинным значениям при росте числа наблюдений. Апробация модели на реальных данных позволила получить кривую зависимости корреляции изменений стоимостей активов портфеля от временного интервала, на которых эти приращения рассчитываются, для акций трех российских компаний. Также была получена оценка месячной матрицы корреляций для портфеля из рассматриваемых активов.

Ключевые слова: долгосрочная корреляция, портфельное управление, моделирование матрицы корреляций.

doi: 10.21293/1818-0442-2020-23-2-73-80

Целью большинства инвесторов является увеличение доходности их портфеля при заданном уровне риска. Для достижения этой цели одни фокусируются на определенном классе ценных бумаг или инвестиционной стратегии, в то время как другие отдают предпочтение политике распределения активов внутри портфеля. Главными факторами, принимаемыми во внимание при формировании нового или изменении текущего портфеля, являются показатели риска и доходности индивидуальных активов, а также метрики связи между изменениями их стоимостей. Если измерение риска и доходности активов осуществляется с помощью обширного набора различных подходов [1–5], то взаимосвязи между активами традиционно принято описывать при помощи матрицы корреляций. Успешность оценки матрицы корреляций во многом определяет и успешность её использования в прикладных финансовых задачах, таких как диверсификация портфеля. Проблема оценки матрицы корреляций является нетривиальной, и ей посвящено множество научных трудов в сфере финансового анализа [6–10].

В классической портфельной теории «Марковица» [11] матрица корреляций доходностей оценивается на исторических данных и далее используется для формирования оптимального портфеля с требуемыми показателями риск/доходность. Важно заметить, что одно из свойств случайных процессов, которые укладываются в классическую портфельную теорию, заключается в том, что корреляция приращений активов инвариантна относительно длины временного интервала, на котором рассматриваются приращения. Благодаря этому среднее, дисперсию и корреляцию можно оценивать на более коротких временных интервалах, а затем масштабировать на любой горизонт.

Однако на практике зачастую наблюдается увеличение корреляции между изменениями стоимости финансовых инструментов при увеличении временного интервала, на котором эти изменения рассматриваются [12]. С точки зрения функционирования

рынка, логичным объяснением такого поведения корреляции является тот факт, что влияние активности участников рынка на изменение стоимости финансовых инструментов тем выше, чем меньше рассматриваемый временной интервал, и, как следствие, составляющая сигнала, отвечающая за свойства самого процесса, просматривается не так сильно. Нарушение предположения об инвариантности корреляции приращений активов относительно длины временного интервала в модели данных приводит к усложнению использования существующих подходов к формированию оптимального портфеля. И, несмотря на то, что данная проблема не является новой (еще в 1979 г. автор [12] описывал разницу в полученной оценке корреляции активов в зависимости от длины временного интервала), задача оценки долгосрочной корреляции остается открытой.

В настоящей работе авторы предлагают модель, с помощью которой оценку долгосрочной корреляции можно производить на базе краткосрочной.

Постановка проблемы

Зависимость корреляции изменений стоимостей активов от временного интервала усложняет процедуру управления портфелем в первую очередь потому, что значительно усложняется модель изменения стоимости базовых активов. Построение модели данных, учитывающей такое поведение корреляции, имеет ряд особенностей. Во-первых, при моделировании матрицы корреляций необходимо соблюдение ее основных свойств – матрица должна быть положительно определена и симметрична. При использовании аналитического подхода к оценке матрицы корреляций данные свойства не нарушаются, однако на практике аналитическое решение такой задачи существует не всегда и исследователи прибегают к численным методам. Использование численных методов уже не гарантирует сохранность основных свойств корреляционной матрицы и зачастую требует применения дополнительных процедур, таких как сглаживание [13], для получения правильной корреляционной структуры.

Во-вторых, целью долгосрочных инвесторов, как правило, является формирование надежного портфеля, который сможет выдержать цикличность рынка. Очевидно, что для таких задач важно иметь оценку долгосрочной корреляции, которая отражает ту самую цикличность [14]. Для получения статистически устойчивой оценки долгосрочной корреляции, которую часто рассчитывают на базе месячных доходностей активов, необходим довольно длительный исторический период. Например, за двадцать лет наблюдений можно получить ряд месячных доходностей (на непересекающихся интервалах) размером лишь в двести сорок точек. Если же рассматривать дневные доходности на таком же интервале, то число наблюдений увеличится до пяти тысяч. Используя меньший временной интервал для расчета доходностей, можно не только сохранить больше информации о движении стоимости активов, но и получить статистически устойчивую оценку корреляции.

Модель, представленная в данной работе, дает ответ на вопрос, как оценить долгосрочную корреляцию активов в условиях недостаточности выборки, имея устойчивую оценку краткосрочной корреляции.

Описание модели

Представим цену актива, наблюдаемую на рынке, в виде суммы двух составляющих: справедливой цены актива, которая определяется макроэкономической ситуацией, состоянием эмитента и другими объективными факторами, и рыночного шума. Под рыночным шумом понимается сдвиг рыночной цены относительно справедливой цены, который обусловлен активностью участников рынка, не связанной с объективными факторами. Примерами такой активности могут быть спекулятивные сделки или мошенничество. Итак, пусть цена актива \hat{P}_t равна:

$$\hat{P}_t = P_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где \hat{P}_t – справедливая цена актива, ε_t – рыночный шум.

Тогда изменение в стоимости актива можно записать в следующем виде:

$$\hat{y}_t(\tau) = (\hat{P}_{t+\tau} - \hat{P}_t) = (P_{t+\tau} - P_t) + (\varepsilon_{t+\tau} - \varepsilon_t) = X_t(\tau) + \eta_t(\tau), \quad (2)$$

где $\hat{y}_t(\tau)$ – наблюдаемое изменение стоимости актива за время τ , $X_t(\tau)$ – изменение справедливой стоимости, $\eta_t(\tau)$ – рыночный эффект (изменение стоимости, вызванное рыночным шумом).

Сформулируем ряд предположений модели:

1. Интенсивность рыночного шума со временем не изменяется:

$$D(\varepsilon_t) = \sigma^2(\varepsilon_t) = \text{const}, \quad (3)$$

где $D(\cdot)$ – дисперсия, $\sigma(\cdot)$ – стандартное отклонение.

Другими словами, шум не имеет накопительного эффекта, он всегда носит локальный характер. Данное предположение означает, что интенсивность

рыночного эффекта также не зависит от времени, т.е. $D(\eta_t) = \text{const}$.

Введем функцию $\lambda(\tau)$, описывающую отношение амплитуды рыночного эффекта к амплитуде фактического изменения стоимости актива за период τ :

$$\lambda(\tau) = \frac{\sigma^2(\eta_t(\tau))}{\sigma^2(X_t(\tau))}. \quad (4)$$

Так как неопределенность в отношении изменения справедливой стоимости актива растет с ростом τ , а дисперсия рыночного эффекта постоянна (следствие из (3)), то $\lambda(\tau)$ – есть убывающая функция следующего вида:

$$\lambda(\tau) = \frac{\sigma^2(\eta_t(\tau))}{\sigma^2(X_t(\tau))} > \frac{\sigma^2(\eta_t(S))}{\sigma^2(X_t(S))} = \lambda(S), \tau < S. \quad (5)$$

2. Изменения справедливой стоимости актива на временных интервалах разной длины имеют одинаковую корреляцию:

$$r(X_t(\tau)) = r(X_t(S)), \forall \tau, S. \quad (6)$$

Данное предположение автоматически выполняется для процессов с независимыми приращениями.

3. Рыночный шум ε_t и стоимость актива $P_v(\tau)$ не зависят для любых t и v .

4. Математическое ожидание рыночного шума равно нулю, т.е. рыночный шум не может задавать тренд в изменении цены актива:

$$E(\varepsilon_t(\cdot)) = 0. \quad (7)$$

Используя сформулированные предположения, рассчитаем корреляцию между двумя активами i, j . Коэффициент корреляции можно записать в следующем виде:

$$r_{i,j}(\tau) = \frac{E\left(\left(y_t^i(\tau) - E(y_t^i(\tau))\right)\left(y_t^j(\tau) - E(y_t^j(\tau))\right)\right)}{\sigma(y_t^i(\tau))\sigma(y_t^j(\tau))} = \frac{r_{X_{i,j}(\tau)}}{\sqrt{(1+\lambda_i(\tau))(1+\lambda_j(\tau))}}, \quad (8)$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание, $y_t^i(\tau)$ – приращение стоимости актива i в момент времени t за период τ , $\sigma(\cdot)$ – стандартное отклонение, $\lambda_{i/j}(\tau)$ – лямбда-функция для актива i/j за период τ , $r_{X_{i,j}(\tau)}$ – корреляция между изменениями в справедливой цене активов i, j за время τ .

Так как влияние рыночного шума не зависит от времени, функция $\lambda_t(\tau)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\lambda_i(\tau) = \frac{\sigma^2(\eta_t^i(\tau))}{\sigma^2(X_t^i(\tau))} = \frac{c_i}{\tau}, \quad (9)$$

где c_i – параметр функции лямбда для актива i .

Чтобы избавиться от неизвестной корреляции между изменениями в справедливой цене активов в уравнении (8), введем понятие коэффициента отношения корреляций. Коэффициент отношения корреляций $R(\tau)$ представляет собой коэффициент отношения корреляций рассматриваемых активов i, j для разных временных интервалов и может быть рассчитан по следующей формуле:

$$R(\tau) = \frac{r_{i,j}(\tau)}{r_{i,j}(\tau_{long})} = \sqrt{\frac{(1+\lambda_i(\tau_{long}))(1+\lambda_j(\tau_{long}))}{(1+\lambda_i(\tau))(1+\lambda_j(\tau))}}, \quad (10)$$

где $r_{i,j}(\tau)$ – оценка корреляции между активами i, j , рассчитанная на приращениях периода τ , $r_{i,j}(\tau_{long})$ – оценка корреляции между активами i, j , рассчитанная на приращениях более длительного периода.

Оценка параметров модели по эмпирическим данным

Для оценки параметров модели $c_i (i=1, \dots, n)$ на основе эмпирических данных возможно использование различных критериев. Поскольку основная практическая ценность состоит в возможности оценивать долгосрочную корреляцию из краткосрочной, предлагается подбирать параметры $c_i (i=1, \dots, n)$ таким образом, чтобы минимизировать расстояние между эмпирическими и теоретическими отношениями корреляций всех активов для всего набора рассматриваемых временных интервалов, а именно:

$$\sum_{m,k} \sum_{\substack{i,j \\ k < m < j < i}} \left(\frac{\hat{r}_{i,j}(\tau_k)}{\hat{r}_{i,j}(\tau_m)} - \sqrt{\frac{(1+\frac{c_i}{\tau_m})(1+\frac{c_j}{\tau_m})}{(1+\frac{c_i}{\tau_k})(1+\frac{c_j}{\tau_k})}} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (11)$$

$k, m = 1, \dots, l,$
 $i, j = 1, \dots, n,$

где n – количество инструментов в портфеле, l – количество рассматриваемых временных интервалов для расчета приращений, $\hat{r}_{i,j}$ – эмпирическая оценка корреляции.

Тестирование метода оценки параметров

Задача оптимизации (11) не имеет аналитического решения, поэтому показать, что в теории с ростом числа наблюдений оценки параметров модели сходятся к истинным значениям, не представляется возможным. В связи с этим для проверки сходимости предлагаемого метода калибровки был проведен численный эксперимент на синтетических данных, полученных посредством имитационного моделирования.

Эксперимент включает в себя выполнение следующих шагов:

1. Генерация приращений справедливых цен активов X_i как коррелированных винеровских процессов с матрицей корреляции

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_{1,2}} & \dots & \rho_{X_{1,n}} \\ \rho_{X_{1,2}} & 1 & \dots & \rho_{X_{2,n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{X_{1,n}} & \rho_{X_{2,n}} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

нулевыми средними и стандартными отклонениями $\sigma_i (i=1, \dots, n)$, где n – количество инструментов в портфеле.

2. Генерация рыночного эффекта η_i для каждого из активов как приращения случайной гауссовой величины со стандартным отклонением σ_ϵ^i .

3. Расчет вектора истинных параметров модели c^{theor} для каждого из активов по формуле (9).

4. Оценка параметров модели c^{estim} на синтетических данных, полученных посредством имитационного моделирования, путем решения задачи оптимизации (11).

5. Расчет погрешности оценки для каждого параметра c_i по следующей формуле:

$$\Delta c_i = \left(\frac{c_i^{theor}}{c_i^{estim}} - 1 \right) \times 100\%. \quad (12)$$

6. Расчет суммарной ошибки оценки матрицы корреляций месячных изменений стоимостей активов, рассчитанной на базе однодневных корреляций при использовании оценок параметров c_i^{estim} :

$$\Delta \Sigma = \sum_{\substack{i,j \\ j < i}} \frac{|r_{i,j} - \hat{r}_{i,j}|}{r_{i,j}}, \quad (13)$$

где $r_{i,j}$ – истинное значение коэффициента корреляции изменения стоимости активов i, j , $\hat{r}_{i,j}$ – его оценка, n – количество инструментов в портфеле.

Тест был проведен для портфелей различной размерности, для наглядности ниже представлены результаты теста для портфеля, состоящего из трех активов, приращения которых являются винеровскими с заданной матрицей корреляций Σ и с заданными параметрами процессов приращений активов. Для простоты вычислений в эксперименте предполагается нулевое математическое ожидание для приращений активов, чего легко добиться путем центрирования данных в случае ненулевого наблюдаемого среднего значения. Эксперимент проводился на широком наборе параметров, включающем низкую, среднюю и высокую корреляцию между приращениями и различный уровень дисперсии приращений активов и рыночного шума. Критериями прохождения теста являются:

1. Снижение ошибки оценки параметров модели, рассчитанной по формуле (12), при увеличении числа симуляций.

2. Суммарная ошибка оценки матрицы корреляций, рассчитанная по формуле (13), менее 1%.

Для всего набора параметров были получены аналогичные результаты, подтверждающие сходи-

мость предлагаемого метода. В табл. 1 приведен пример случая высокоррелированных приращений активов и стандартных отклонений, близких к реально наблюдаемым на российском рынке акций. Результаты тестирования предлагаемого подхода для описанного случая представлены в табл. 2.

Таблица 1

Входные параметры теста			
Параметр	Значение, %	Параметр	Значение
σ_1	15	σ_2	30%
σ_3	40	σ_ε	10%
$\rho_{X_{1,2}}$	70	$\rho_{X_{1,3}}$	80%
$\rho_{X_{2,3}}$	60	N	10 000 000

*В таблице указаны годовые значения.

Таблица 2

Оценки параметров модели и матрицы корреляций			
Параметр	Истинное значение	Оценка	Ошибка, %
c_1	0,889	0,895	0,6
c_2	0,222	0,229	3,2
c_3	0,125	0,122	2,2
$\rho_{1,2}$	68,42%	68,47%	0,1
$\rho_{1,3}$	78,36%	78,38%	0,0
$\rho_{2,3}$	59,59%	59,77%	0,3
$\Delta\Sigma$			0,4

Как видно из результатов теста, предлагаемый дает относительно точную оценку долгосрочной корреляции на базе краткосрочной, суммарная ошибка оценки матрицы корреляций менее 1%. На рис. 1 показано, что оценка параметров модели сходится к истинному значению при увеличении числа наблюдений.

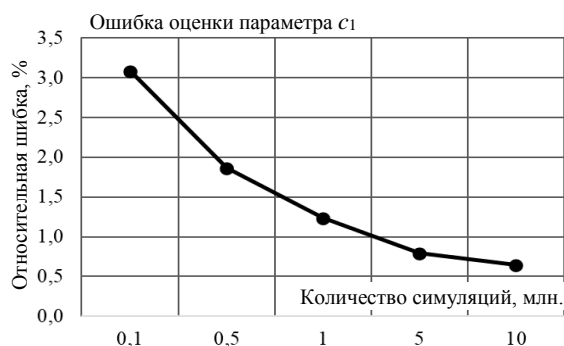


Рис. 1. Сходимость оценки параметра модели c_1 к истинному значению при увеличении числа симуляций

На рис. 2 представлено сравнение истинной траектории для корреляции активов x_1, x_2 в зависимости от длины временного интервала, а также его эмпирическая и модельная оценки для случая ограниченной выборки (5 лет дневных наблюдений). Наглядно видно, что для долгосрочной корреляции модельная оценка точнее, чем эмпирическая.



Рис. 2. Эмпирическая и модельная оценка коэффициента корреляции, а также истинное его значение для приращений активов x_1, x_2

Практические результаты

Для апробации предлагаемой модели на практике был рассмотрен процесс формирования оптимального портфеля «Марковица». Для теста использовались данные о ценах акций российских компаний, имеющих схожий уровень ликвидности:

1. ПАО «Селигдар» (SELG).
2. ПАО «Аптечная сеть 36,6» (АПТК).
3. ПАО «ММК» (MAGN).

Данные о ценах акций рассматриваемых компаний находятся в свободном доступе на сайте Финам [15]. Самой длинной историей обладают акции ПАО «Аптечная сеть 36,6», цены которых наблюдаются с 2003 г., цены акций ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» доступны с 2006 г., а ПАО «Селигдар» – лишь с 2012 г. Для оценки долгосрочной (месячной) корреляции по данным активам доступно лишь 96 наблюдений изменения цены на непересекающихся месячных интервалах. Несмотря на то, что доступные наблюдения включают в себя информацию об историческом периоде длиной в восемь лет и стрессовый период 2014–2015 гг., размер выборки, очевидно, является недостаточным, чтобы получить устойчивую оценку матрицы месячных корреляций по эмпирическим данным. Для увеличения числа наблюдений можно использовать данные о дневных, часовых или даже минутных изменениях в цене активов, что существенно расширит выборку и позволит получить устойчивую оценку матрицы корреляций.

Далее встает вопрос о выборе исторического окна, которое используется для оценки матрицы корреляций или параметров модели изменения активов в портфеле. Ключевым моментом при его выборе является сохранение баланса между релевантностью информации, содержащейся в данных, и размером доступной выборки. Даже если для актива доступна длинная история, использование слишком большого временного промежутка для оценки параметров модели может привести к включению в оценку значительного эффекта от изменчивости ди-

намики активов во времени. Чтобы этого избежать, зачастую на практике используют окно от трех до пяти лет. Например, европейские регуляторные органы [16] рекомендуют для оценки параметров моделей оценки рисков использовать историческое окно размером в три года.

Анализ, результаты которого представлены в этом разделе, основан на дневных изменениях в цене рассматриваемых активов за период с 2015 г. по март 2020 г. включительно. Доступные исторические данные были поделены на два интервала:

1. Интервал, используемый для оценки параметров и формирования портфеля (январь 2015 г. – июнь 2019 г.).

2. Интервал для тестирования (июнь 2019 г. – март 2020 г.).

Для рассматриваемых акций была получена оценка матрицы месячной ковариации с использованием различных матриц корреляции:

1. Эмпирическая оценка однодневной корреляции (портфель 1).

2. Эмпирическая оценка месячной корреляции на доступном размере выборки (портфель 2).

3. Модельная оценка месячной корреляции согласно предлагаемой модели (портфель 3).

Эмпирические матрицы корреляций дневных и месячных изменений цен рассматриваемых активов за период с января 2015 г. по июнь 2019 г. включительно представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Эмпирическая матрица корреляций дневных изменений цен акций за период с января 2015 г. по июнь 2019 г.

	Аптеки, %	ММК, %	Селигдар, %
Аптеки	100,0	5,0	1,5
ММК	5,0	100,0	0,7
Селигдар	1,5	0,7	100,0

Таблица 4

Эмпирическая матрица корреляций месячных изменений цен акций за период с января 2015 г. по июнь 2019 г.

	Аптеки, %	ММК, %	Селигдар, %
Аптеки	100,0	9,9	0,8
ММК	9,9	100,0	5,1
Селигдар	0,8	5,1	100,0

Для оценки параметров модели c_i использовались эмпирические матрицы корреляций изменений стоимостей активов для временных интервалов от одного дня до недели. Недельный интервал изменения стоимостей был выбран в качестве базы для прогнозирования месячных корреляций из следующих соображений:

1) количество наблюдений недельных изменений стоимостей активов еще достаточно для получения относительно точной эмпирической оценки корреляций;

2) временные ряды недельных изменений стоимостей активов можно считать стационарными на

уровне значимости $\alpha = 0,05^*$, что позволяет использовать их для прогнозирования месячных корреляций;

3) количество временных интервалов меньшей длины достаточно для оценки параметров модели.

Оценки параметров модели для приращений акций ПАО «Аптечная сеть 36,6», ПАО «ММК» и ПАО «Селигдар» составили соответственно $c_1 = 21511,6$, $c_2 = 0,12$, $c_3 = 25560,9$.

На рис 3 изображено изменение эмпирической и модельной корреляции в зависимости от временного интервала, на котором рассчитываются приращения акций для пары Селигдар–ММК. Как видно из рис. 3, в отличие от эмпирической, модельная оценка дает сглаженную кривую зависимости корреляции от временного интервала, на котором рассчитаны приращения активов.

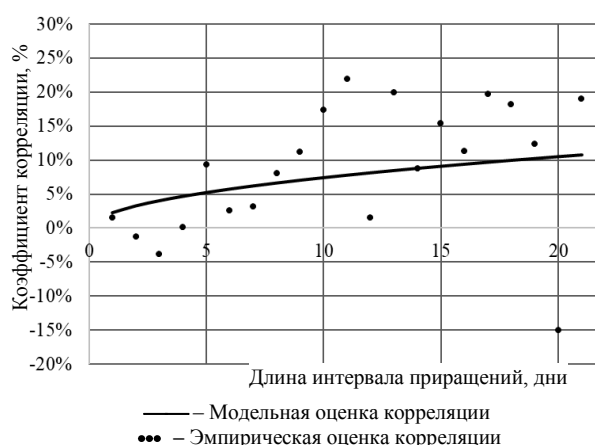


Рис. 3. Эмпирическая и модельная оценки коэффициента корреляции для приращений акций Башнефть и ММК в зависимости от временного интервала

В табл. 5 представлена модельная оценка месячной матрицы корреляций, рассчитанная с использованием эмпирической матрицы корреляций недельных изменений стоимостей активов и формулы (10).

Таблица 5

Модельная оценка матрицы корреляций месячных изменений цен акций

	Аптеки, %	ММК, %	Селигдар, %
Аптеки	100,0	10,5	-16,0
ММК	10,5	100,0	10,8
Селигдар	-16,0	10,8	100,0

Можно заметить, что корреляция между приращениями акций ПАО «Селигдар» и ПАО «Аптечная сеть 36,6», полученная при помощи модели, составила -16%, в то время как эмпирическая оценка месячной корреляции для той же пары активов, произведенная на 54 точках и представленная в табл. 4, составила 0,8%. Причиной этому может являться то, что эмпирическая оценка произведена на малом количестве наблюдений и как следствие является ста-

*Для проверки стационарности были использованы три статистических теста: расширенный тест Дики–Фуллера (ADF), тест Квятковского–Филлипса–Шмидта–Шина (KPSS), тест Филлипса–Перрона (PP) [16].

тистически неустойчивой. Более того, для данных акций наблюдается сильный разброс эмпирически наблюдаемого коэффициента корреляции в зависимости от временного интервала, а, как отмечалось ранее, модельная оценка является более сглаженной.

Используя полученные матрицы корреляций, для выбранных активов были составлены три оптимальных портфеля «Марковица» с минимальным возможным риском и уровнем доходности не ниже заданного (5% годовых) на конец июня 2019 г.

Как видно из табл. 6, наименьший риск портфеля при заданной доходности достигается при использовании матрицы корреляций, полученной при помощи предлагаемой модели (портфель 3). Предполагая отсутствие процедуры реформирования портфеля, было проведено сравнение основных характеристик, которые демонстрировали портфели на протяжении времени на интервале для тестирования.

Таблица 6
Сравнение оптимальных портфелей, полученных при использовании разных матриц корреляций

Характеристики	Портфель 1	Портфель 2	Портфель 3
Стоимость, руб., включая:	10 000	10 000	10 000
АРТК	8 506	8 662	8 594
MAGN	1 207	1 012	870
SELG	287	326	537
Доходность, %	5,8	5,0	5,1
Риск, %	7,6	6,4	1,6

На рис. 4 представлена динамика стоимости полученных портфелей за период июль 2019 – март 2020 г., а в табл. 7 – характеристики, демонстрируемые портфелями в течение тестового интервала. Из рис. 4 видно, что портфели 1 и 2 демонстрируют практически идентичную динамику стоимости во времени, в то время как стоимость портфеля 3, построенного при помощи модельной оценки матрицы корреляций, увеличивается при увеличении длительности периода держания портфеля в условиях отсутствия процедуры его реформирования. Такое поведение портфеля крайне благоприятно для долгосрочных инвесторов.

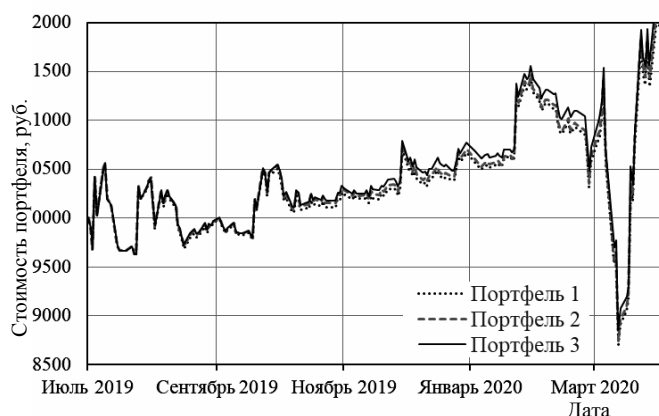


Рис. 4. Динамика стоимости рассматриваемых портфелей, июль 2019 г. – март 2020 г.

Как видно из табл. 7, самую высокую доходность в 22% за 10 месяцев показал портфель 3, обогнав при практически равном риске портфель 2 на 2%.

Таблица 7
Сравнение основных характеристик рассматриваемых портфелей, июль 2019 г. – март 2020 г.

Характеристики	Портфель 1	Портфель 2	Портфель 3
Общая доходность портфеля, %	19,5	20,8	22,4
Общее изменение стоимости портфеля, руб.	1951,3	2047,7	2233,5
Стандартное отклонение в изменении стоимости портфеля, руб.	232,4	236,7	235,7
Среднее изменение стоимости портфеля, руб.	10,3	10,8	11,8

Заключение

Представленный в данной работе подход к оценке корреляции приращений активов в портфеле позволяет получить оценку долгосрочной корреляции на базе краткосрочной, в том числе в условиях ограниченного количества доступных наблюдений. Данное преимущество подхода дает возможность оценить долгосрочную корреляцию для низколиквидных финансовых инструментов, а также для инструментов, не обладающих длинной историей в силу недавнего присутствия на рынке.

Так как модель использует аналитический подход к моделированию матрицы корреляции (за исключением численных методов, используемых для оценки параметров модели), то полученная матрица корреляций сохраняет свои основные свойства положительной определенности и симметричности по построению. Более того, предлагаемый подход позволяет сгладить кривую зависимости корреляции от временного интервала, на котором рассчитываются приращения активов портфеля, что позволяет упростить дальнейшее использование такой оценки в различных моделях изменения стоимостей базовых активов.

Проведенный численный эксперимент с использованием синтетических данных, полученных посредством имитационного моделирования, показал, что с ростом числа наблюдений оценки параметров модели сходятся к истинным значениям, что говорит об адекватности предлагаемого метода оценки параметров модели.

Апробация модели на реальных данных позволила получить кривую зависимости корреляции изменений стоимостей от временного интервала для акций трех компаний ПАО «Селигдар» (SELG), ПАО «Аптечная сеть 36,6» (АРТК), ПАО «ММК» (MAGN), а также была получена оценка месячной матрицы корреляций. В рамках тестирования на реальных данных были сформированы три оптимальных портфеля согласно теории «Марковица» с использованием матриц корреляций, полученных тре-

мя возможными способами, в том числе при помощи предлагаемой модели. На этапе формирования портфель, построенный при помощи модельной матрицы корреляций, показал наименьший возможный уровень риска при заданном уровне доходности (1,6% против 7,6 и 6,4% для альтернативных портфелей). При наблюдении за динамикой стоимости портфелей в предположении отсутствия процедуры его переформирования портфель, построенный при помощи модельной матрицы корреляций, показал доходность на 2–4% выше при том же уровне риска.

Литература

1. Бронштейн Е.М. О формировании портфелей российских ценных бумаг на основе комбинированных квантильных мер риска / Е.М. Бронштейн, Е.В. Тулупова // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 3. – С. 115–120.
2. Бронштейн Е.М. Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска / Е.М. Бронштейн, М.М. Качкаева, Е.В. Тулупова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 1. – С. 178–183.
3. Пимонов А.Г. Оптимизация состава и структуры инвестиционного портфеля на основе энтропийной меры риска и статистики Херста / А.Г. Пимонов, Р.С. Арнаутов // Инжиниринг предприятий и управление знаниями (ИП&УЗ–2018): сб. науч. трудов XXI Рос. науч. конф. – М.: РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2018. – 307 с.
4. Rachev S.T. Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing / S.T. Rachev, C. Menn, F.J. Fabozzi. – Hoboken: Wiley, 2005. – 369 p.
5. Abad P. Evaluating the performance of the skewed distributions to forecast Value at Risk in the Global Financial Crisis / P. Abad, S. Benito, C. López // Journal of Risk. – 2016. – Vol. 19, No. 5. – P. 1–18.
6. Düllmann K. Estimating asset correlations from stock prices or default rates – which method is superior? / K. Düllmann, J. Küll, M. Kunisch // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2010. – Vol. 34, No. 11. – P. 2341–2357.
7. Ledoit O. The power of (non-)linear shrinking: A review and guide to covariance matrix estimation / O. Ledoit, M. Wolf // Working Paper no. 323, Department of Economics, University of Zurich. – Zurich: University of Zurich, 2019. – 41 p.
8. Shevlyakov G. Robust Estimation of the Correlation Coefficient: An Attempt of Survey / G. Shevlyakov, P. Smirnov // Austrian journal of statistics. – 2011. – Vol. 40, No. 1&2. – P. 147–156.
9. Assessment of long-range correlation in time series: How to avoid pitfalls / J. Gao, J. Hu, W.W. Tung, Y. Cao, N. Sarshar, V.P. Roychowdhury // Physical review E. – 2006. – Vol. 73, No. 1, Pt. 2. – P. 16–117.
10. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, No. 1. – P. 77–91.
11. Epps T.W. Comovements in Stock Prices in the Very Short Run // Journal of the American Statistical Association. – 1979. – Vol. 74, No. 366a. – P. 291–298.
12. Bun J. Cleaning correlation matrices / J. Bun, J.-P. Bouchaud, M. Potters // Risk. – 2016 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.cfm.fr/assets/ResearchPapers/2016-Cleaning-Correlation-Matrices.pdf>, свободный (дата обращения: 16.03.2020).
13. Chin C.J. Correlations Have Personality, Too: An Analysis of Correlations between Assets [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.naaim.org/wp-content/uploads/2013/10/00L_Correlations_have_Personality_carlton_chin.pdf, свободный (дата обращения: 16.03.2020).
14. Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. – Basel: Bank for International Settlements, 2004. – 239 p.
15. Официальный сайт Финам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.finam.ru/>, свободный (дата обращения: 16.03.2020).
16. Arltová M. Selection of Unit Root Test on the Basis of Length of the Time Series and Value of AR(1) Parameter / M. Arltová, D. Fedorová // Statistika. – 2016. – Vol. 96, No. 3. – P. 47–64.

Барышева Александра Евгеньевна

Аспирант Инженерной школы ядерных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета (НИ ТПУ) Ленина пр-т, д. 2, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 42-39-34
Эл. почта: alexandramelnikk@mail.ru

Марков Александр Сергеевич

Канд. физ.-мат. наук, рук. направления валидации математических моделей ООО «ЭКО-ТОМСК» Ленина пр-т, д. 60, стр. 1, оф. 305, г. Томск, Россия, 634034
Тел.: +7 (382-2) 90-06-01
Эл. почта: alexander.markov@econophysica.com

Мицель Артур Александрович

Д-р техн. наук, профессор каф. автоматизированных систем управления (АСУ) Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), профессор НИ ТПУ Ленина пр-т, д. 40, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 51-05-30
Эл. почта: maa@asu.tusur.ru

Barysheva A.E., Markov A.S., Mitcel A.A.

New approach to the assessment of portfolio long-term correlation

A new approach to the portfolio long-term correlation assessment is proposed in this paper which allows obtaining the long-term correlation estimate based on a short-term correlation. The advantage of proposed model is that it can be used for non-liquid financial instruments and instruments which are new to the market, as it enables estimating the model parameters based on a restricted number of asset price observations. The numerical experiment described in this paper shows the model parameters converge to the true values with increasing number of the observations. The proposed model was applied to the real data of three Russian companies to obtain the curve that describes the assets correlation dependency on a holding period. Also, for the portfolio considered, the correlation matrix of one-month returns is obtained.

Keywords: long-term correlation, portfolio management, correlation matrix modeling.

doi: 10.21293/1818-0442-2020-23-2-73-80

References

1. Bronstein E.M., Tulupova E.V. [On the forming of portfolios of the Russian securities based on the complex quantile risk measures]. *Audit and financial analysis*, 2014, no. 3, pp. 115–120 (in Russ.).
2. Bronshtein E.M., Kachkaeva M.M., Tulupova E.V. [Control of investment portfolio based on complex quantile risk measures]. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2011, no. 1, pp. 178–183 (in Russ.).
3. Pimonov A.G., Arnautov R.S., *Optimizaciya sostava i struktury investicionnogo portfelya na osnove entropijnoj mery riska i statistiki Hersta* [Optimization of the composition and structure of the investment portfolio based on the entropy risk indicator and Hurst statistics]. *Inzhiniring predpriyatij i upravlenie znaniyami (IP&UZ–2018): sbornik nauchnyh trudov XXI Rossijskoj nauchnoj konferencii*. [Enterprise Engineering and Knowledge Management (EE & KM–2018). Proc. of the XXI Russian Scientific Conference]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2018. pp. 294–299 (in Russ.).
4. Rachev S.T., Menn C., Fabozzi F.J. *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing*. Hoboken, Wiley Publ., 2005. 369 p.
5. Abad P., Benito S., López C., Evaluating the performance of the skewed distributions to forecast Value at Risk in the Global Financial Crisis. *Journal of Risk*, 2016, vol. 18, no. 5, pp. 1–18.
6. Düllmann K., Küll J., Kunisch M. Estimating asset correlations from stock prices or default rates – which method is superior? *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2010, vol. 34, no. 11, pp. 2341–2357.
7. Ledoit O., Wolf M., *The power of (non-)linear shrinking: A review and guide to covariance matrix estimation*. Working Paper No. 323, Department of Economics, University of Zurich. Zurich, University of Zurich Publ., 2019. 41p.
8. Shevlyakov G., Smirnov P.O., Robust Estimation of the Correlation Coefficient: An Attempt of Survey. *Austrian journal of statistics*. 2011, vol. 40, no. 1&2, pp. 147–156.
9. Gao J., Hu J., Tung W.W., Cao Y., Sarshar N., Roychowdhury V.P. Assessment of long-range correlation in time series: How to avoid pitfalls. *Physical review E.*, 2006, vol. 73, no. 1, pt. 2., pp. 16–117.
10. Markowitz H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*. 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91.
11. Epps T.W. Comovements in Stock Prices in the Very Short Run. *Journal of the American Statistical Association*, 1979, vol. 74, no. 366a, pp. 291–298.
12. Bun J., Bouchaud J.-P., Potters M. Cleaning correlation matrices. *Risk*, 2016. Available at: <https://www.cfm.fr/assets/ResearchPapers/2016-Cleaning-Correlation-Matrices.pdf> (Accessed: March 16, 2020).
13. Chin C.J. Correlations Have Personality, Too: An Analysis of Correlations between Assets. Available at: http://www.naaim.org/wp-content/uploads/2013/10/00L_Correlations_have_Personality_carlton_chin.pdf (Accessed: March 16, 2020).
14. Basel Committee on Banking Supervision. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Basel, Bank for International Settlements Publ., 2004. 239 p.
15. Official «Finam» website. Available at: <https://www.finam.ru/> (Accessed: March 16, 2020).
16. Arltová M., Fedorová M. Selection of Unit Root Test on the Basis of Length of the Time Series and Value of AR (1) Parameter. *Statistika*, 2016, vol. 96, no. 3, pp. 47–64.

Alexandra E. Barysheva

Postgraduate student, School of Nuclear Science and Engineering, National Research Tomsk Polytechnic University 2, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 42-39-34
Email: alexandramelnikk@mail.ru

Alexander S. Markov

Candidate of Physics and Mathematics,
Lead of Model Validation Department in «Econophysics» Ltd. 60, Lenin pr. building 1, off. 305, Tomsk, Russia, 634034
Phone: +7 (382-2) 90-06-01
Email: alexander.markov@econophysics.com

Artur A. Mitcel

Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Automated Control Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics 40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 51-05-30
Email: maa@asu.tusur.ru