УДК 519.163

Ю.В. Шабля, Д.В. Кручинин

Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения теории производящих функций

Представлена модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ. В отличие от оригинальной версии метода, в предлагаемой модификации применяется метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества по известному выражению производящей функции для последовательности значений функции мощности.

Ключевые слова: комбинаторная генерация, дерево И/ИЛИ, производящая функция, метод, ranking, unranking.
doi: 10.21293/1818-0442-2019-22-3-55-60

Комбинаторное множество – это конечное множество, элементы которого имеют некоторую структуру, и имеется процедура построения элементов этого множества [1]. Элементы комбинаторных множеств (комбинаторные объекты), таких как сочетания, перестановки, разбиения, графы, деревья и т.д., играют важную роль в математике и информатике, а также имеют множество приложений [2–4].

Существуют следующие общие подходы к разработке алгоритмов комбинаторной генерации:

– метод поиска с возвратом [5, 6];
– ECO-метод [7, 8];
– метод Ф. Флажоле [9, 10];
– метод Б.Я. Рябко [11, 12];
– метод В.В. Кручинина [1, 13].

Проведенный анализ общих методов построения алгоритмов комбинаторной генерации показал:

– часть методов (поиск с возвратом, ECO-метод) направлены только на разработку алгоритмов последовательной генерации комбинаторных объектов;

– существуют ограничения на возможность применения части методов (ECO-метод, метод Ф. Флажоле) для комбинаторных множеств, описываемых более чем одним параметром;

– большинство методов требуют представления комбинаторного объекта в специальном виде (слово, последовательность, спецификация, дерево И/ИЛИ), что не всегда является тривиальной задачей и требует дополнительного исследования;

– существуют требования к наличию дополнительной информации о комбинаторном множестве.

В таблице представлены результаты сравнения выявленных основных характеристик методов построения алгоритмов комбинаторной генерации:

– «Listing»: имеется возможность построения алгоритмов последовательной генерации комбинаторных объектов;

– «Ranking/Unranking»: имеется возможность построения алгоритмов ранжирования и генерации комбинаторных объектов в соответствии с заданным рангом;

– «Более одного параметра»: имеется возможность применения метода для комбинаторных множеств, описываемых более чем одним параметром;

– «Биекция»: имеется требование представления комбинаторного объекта в специальном виде;

– «Дополнительные требования»: имеются требования к наличию дополнительной информации, описывающей комбинаторное множество.

Сравнение характеристик общих методов построения алгоритмов комбинаторной генерации

Метод	Характеристика				
	Listing	Ranking/Unranking	Более одного параметра	Биекция	Дополнительные требования
Метод поиска с возвратом	+	–	+	–	
ECO-метод	+	–	–	+	ECO-правило
Метод Ф. Флажоле	+	+	–	+	Функция мощности, производящая функция
Метод Б.Я. Рябко	+	+	+	+	Функция мощности, вспомогательные функции
Метод В.В. Кручинина	+	+	+	+	Функция мощностииз алгебры $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$

Для дальнейшего исследования выбран метод В.В. Кручинина, основанный на применении деревьев И/ИЛИ, так как данный метод:

– позволяет разрабатывать все типы алгоритмов комбинаторной генерации (listing, ranking и unranking);

– не имеет ограничений на количество параметров, которыми описываются комбинаторные множества, что позволяет рассматривать более сложные дискретные структуры;

– требует в качестве дополнительной информации, описывающей комбинаторное множество, только выражение функции мощности, на основе которой строится структура дерева И/ИЛИ.

Метод построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ

В методе построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ применяется представление комбинаторных множеств в виде структуры дерева И/ИЛИ, число вариантов которого должно совпадать со значением функции мощности комбинаторного множества. В дальнейшем с помощью такого дерева И/ИЛИ можно построить алгоритмы последовательной генерации объектов комбинаторных множеств, их ранжирования (Rank) и генерации по рангу (Unrank). Эффективность этого метода показана на генерации достаточно большого числа комбинаторных множеств: перестановки, сочетания, разложения, разбиения, композиции, числа Фибоначчи, числа Каталана, деревья, выражения некоторых языков [1].

Дерево И/ИЛИ – это дерево, которое содержит узлы двух типов: И-узел и ИЛИ-узел. Вариант дерева И/ИЛИ – это дерево, которое получается из дерева И/ИЛИ путем отсечения у всех ИЛИ-узлов всех дуг, кроме одной. Пример структуры дерева И/ИЛИ и всех его вариантов представлен на рис. 1.

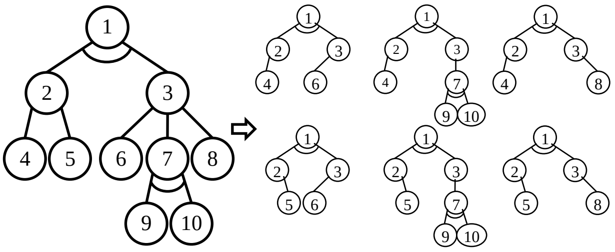

Рис. 1. Дерево И/ИЛИ и его варианты

Если для комбинаторного множества A известно выражение функции мощности $f = |A|$, которое принадлежит алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$, где R – оператор примитивной рекурсии, то для такого комбинаторного множества существует возможность построения дерева И/ИЛИ, число вариантов которого будет совпадать со значением функции мощности комбинаторного множества [14]. Для этого необходимо для заданной функции мощности f комбинаторного множества A:

– все операции сложения + из f представить в виде ИЛИ-узла дерева И/ИЛИ, где все слагаемые – это сыновья данного ИЛИ-узла;

– все операции произведения × из f представить в виде И-узла дерева И/ИЛИ, где все множители – это сыновья данного И-узла;

– все коэффициенты $k \in \mathbb{N}$ из f представить в виде ИЛИ-узла дерева И/ИЛИ, у которого все сыновья являются листами и их количество равно k;

– все рекурсивные операции из f представить в виде схемы рекурсивной композиции дерева И/ИЛИ.

Таким образом, метод построения алгоритмов комбинаторной генерации $\mathrm{Rank}(a): A \to \mathbb{N}$, где $a \in A$, и $\mathrm{Unrank}(r): \mathbb{N} \to A$, где $r \in \mathbb{N}$, на основе деревьев И/ИЛИ можно записать в следующем виде:

Вход: Функция мощности f комбинаторного множества A, принадлежащая алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$.

Выход: Алгоритмы комбинаторной генерации

$$\mathrm{RankVariant}: W(D) \to \mathbb{N}_{|W(D)|},$$

$$\mathrm{UnrankVariant}: \mathbb{N}_{|W(D)|} \to W(D),$$

при этом каждый вариант v дерева И/ИЛИ D, построенного для некоторого комбинаторного множества A, должен однозначно соответствовать конкретному комбинаторному объекту $a \in A$, т.е. должна быть определена биекция $A \leftrightarrow W(D)$, где $W(D)$ – множество вариантов v дерева И/ИЛИ D. Совокупность данной биекции с алгоритмами RankVariant и UnrankVariant представляют собой искомые алгоритмы комбинаторной генерации Rank и Unrank.

Алгоритм RankVariant определяет соответствие между элементами множества $W(D)$ всех вариантов дерева И/ИЛИ D и элементами конечного множества натуральных чисел $\mathbb{N}_{|W(D)|} = \{0, 1, \ldots, |W(D)| - 1\}$. Данный алгоритм ранжирования позволяет для каждого варианта $v \in W(D)$ дерева И/ИЛИ D поставить в соответствие некоторый уникальный порядковый номер $r \in \mathbb{N}_{|W(D)|}$, называемый рангом.

Алгоритм UnrankVariant выполняет обратное действие к алгоритму RankVariant.

Если для комбинаторного множества A построена структура дерева И/ИЛИ D, то возникает проблема определения биекции между элементами комбинаторного множества A и множества вариантов дерева И/ИЛИ D (для каждого варианта $v \in W(D)$ должен однозначно соответствовать единственный комбинаторный объект $a \in A$ и наоборот). Для решения данной проблемы не существует формализованного подхода, так как каждое комбинаторное множество обладает своими и зачастую совершенно уникальными характеристиками, но при этом можно использовать следующие рекомендации: провести анализ изменений в структуре комбинаторных объектов, которые проявляются при переходе от одного узла дерева И/ИЛИ к другому, и отразить данные изменения в биекции. В качестве возможных путей исследования можно рассмотреть изменение параметров при переходе по разным ветвям дерева или при переходе с одного уровня на другой [15, 16].

Если выражение функции мощности $f = |A|$, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$, не известно, тогда структура дерева И/ИЛИ для такого комбинаторного множества не будет построена и, соответственно, применение метода построения алгоритмов комбинаторной генерации становится невозможным. Предлагается решить эту проблему за счет применения математического аппарата производящих функций, так как он является основополагающим в современной комбинаторике и для многих комбинаторных множеств уже известны выражения производящих функций или существует возможность получения таких выражений.

Метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций

Производящие функции позволяют находить решения для задач из самых разных областей математических наук, таких как комбинаторика, теория чисел, теория вероятностей и др. Основное преимущество использования производящих функций заключается в том, что они позволяют представить бесконечные числовые последовательности в компактной форме и при этом имеется соответствующий математический аппарат для исследования таких числовых последовательностей через их производящие функции.

В работе [17] для коэффициентов степеней производящих функций введено понятие композиты производящей функции, которое легло в основу математического аппарата степеней производящих функций. Композитой обыкновенной производящей функции $G(t)=\sum_{n>0} g_n t^n$ называется функция $G^{\Delta}(n,k)$, которая является функцией коэффициентов k-й степени производящей функции $G(t)$:

$$\left(G(t)\right)^k=\sum_{n\geq k} G^{\Delta}(n,k)t^n.$$

Математический аппарат степеней производящих функций обеспечивает такие операции над композитами, как сдвиг, сложение, умножение, композиция, а также определение взаимных и обратных композит. Такой набор операций над композитами позволяет получать явные выражения для коэффициентов производящих функций.

Например, если для заданной производящей функции $G(t)=\sum_{n>0} g_n t^n$ известна ее композита $G^{\Delta}(n,k)$, тогда значения коэффициентов g_n могут быть вычислены как $g_n=G^{\Delta}(n,1)$.

Также если существует возможность представления заданной производящей функции $G(t)$ в виде композиции двух производящих функций

$$G(t)=R(F(t))=\sum_{n\geq 0} g_n t^n,$$

где $R(t)=\sum_{n\geq 0} r_n t^n$ и $F(t)=\sum_{n>0} f_n t^n$, тогда значения коэффициентов g_n могут быть вычислены как

$$g_n=\begin{cases} r_0, & n=0; \\ \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k) r_k, & n>0. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, для нахождения явных выражений коэффициентов производящих функций с использованием математического аппарата степеней производящих функций необходимо декомпозировать производящую функцию на функции, для которых известны значения композит, и затем применить к ним соответствующие операции. В работе [18] представлено алгоритмическое и программное обеспечение для данного метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций.

Если для некоторого комбинаторного множества A рассмотреть его подмножество $A_n \subset A$, которое содержит только комбинаторные объекты размерности n, тогда функция мощности $f(n)=|A_n|$ такого комбинаторного множества A_n может быть описана некоторой производящей функцией

$$F(t)=\sum_{n\geq 0} f_n t^n=\sum_{n\geq 0} f(n)t^n=\sum_{n\geq 0} |A_n| t^n.$$

Следовательно, для получения выражения функции мощности $f(n)$ комбинаторного множества, для которого известна производящая функция, можно использовать описанный выше метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций. Однако если рассматриваемый комбинаторный объект описывается более чем одним параметром (например, сочетание из n элементов по m), тогда применение данного метода становится невозможным, так как соответствующий ему математический аппарат степеней производящих функций определен только для одномерных производящих функций. По результатам проведенных исследований композиций производящих функций, в которых внешняя функция описывается двумя формальными переменными, данный метод был дополнен для следующих случаев:

1. Композиция двух производящих функций

$$G(x,y)=R(F(x),y)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} g_{n,m} x^n y^m,$$

где $R(x,y)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} r_{n,m} x^n y^m$ и $F(t)=\sum_{n>0} f_n t^n$.

Если зафиксировать переменную y как константу, то $R(x,y)=R_y(x)=\sum_{n\geq 0} r_n x^n$, где $r_n=\sum_{m\geq 0} r_{n,m} y^m$. Тогда, используя (1), значения коэффициентов $g_{n,m}$ могут быть вычислены как [19]

$$g_{n,m}=\begin{cases} r_{0,m}, & n=0; \\ \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k) r_{k,m}, & n>0. \end{cases}$$

2. Композиция двух производящих функций

$$G(x,y)=R(F_1(x),F_2(y))=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} g_{n,m} x^n y^m,$$

где $R(x,y)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} r_{n,m} x^n y^m$, $F_1(t)=\sum_{n>0} a_n t^n$ и $F_2(t)=\sum_{n>0} b_n t^n$.

Тогда значения коэффициентов $g_{n,m}$ могут быть вычислены как

$$g_{n,m}=\begin{cases} r_{0,0}, & m=0, n=0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_1^{\Delta}(n,k) r_{k,0}, & m=0, n>0; \\ \sum_{l=1}^{m} F_2^{\Delta}(m,l) r_{0,l}, & m>0, n=0; \\ \sum_{l=1}^{m} F_2^{\Delta}(m,l) \sum_{k=1}^{n} F_1^{\Delta}(n,k) r_{k,l}, & m>0, n>0. \end{cases}$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для более сложных вариантов композиций производящих функций. При этом основным ограничением является требование того, что декомпозирование заданной производящей функции должно осуществляться в рамках одной формальной переменной, а остальные переменные в этот момент фиксируются как константы (т.е. в качестве внутренних производящих функций композиции должны быть одномерные производящие функции).

Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации

Применение метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций для нахождения выражения функции мощности заданного комбинаторного множества позволяет воспользоваться методом построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ для таких комбинаторных множеств, для которых не известно выражение функции мощности, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$, но известно выражение производящей функции для последовательности значений функции мощности. Также расширение данного метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций для случая композиции производящих функций, в которой внешняя функция является функцией нескольких переменных, делает возможным нахождение выражений функций мощности для комбинаторных множеств, которые описываются более чем одним параметром.

Однако существуют ограничения на возможность применения данного метода, так как выражение функции мощности заданного комбинаторного множества, получаемое в результате применения метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций, не всегда соответствует требуемой алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$. Например, такая ситуация может возникнуть, когда композита производящей функции не принадлежит алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$.

Достоинством применения данного метода является то, что по виду структуры композиции производящих функций, полученной для производящей функции последовательности значений функции мощности заданного комбинаторного множества, зачастую можно получить некоторое представление о свойствах элементов данного комбинаторного множества.

Запишем модифицированный метод построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ в виде последовательности шагов:

Шаг 1. Если известно выражение функции мощности f комбинаторного множества A, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$, то переход на шаг 4.

Шаг 2. Если известно выражение производящей функции F для последовательности значений функции мощности f комбинаторного множества A, то применить метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций, иначе дальнейшее применение метода невозможно.

Шаг 3. Если получено выражение функции мощности f комбинаторного множества A, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$, то переход на шаг 4, иначе дальнейшее применение метода невозможно.

Шаг 4. На основе выражения функции мощности f комбинаторного множества A построить структуру дерева И/ИЛИ D.

Шаг 5. Определить биекцию $A \leftrightarrow W(D)$ между элементами комбинаторного множества A и множества всех вариантов v дерева И/ИЛИ D в виде алгоритмов $\mathrm{ObjectToVariant}(a,D): A \to W(D)$, где $a \in A$, и $\mathrm{VariantToObject}(v,D): W(D) \to A$, где $v \in W(D)$.

Шаг 6. Определить биекцию $W(D) \leftrightarrow \mathbb{N}_{|W(D)|}$ между элементами множества всех вариантов v дерева И/ИЛИ D и конечного множества натуральных чисел $\mathbb{N}_{|W(D)|} = \{0, 1, \ldots, |W(D)|-1\}$ с помощью алгоритмов

$$\mathrm{RankVariant}(root, v, D): W(D) \to \mathbb{N}_{|W(D)|},$$

где $root$ – корень дерева И/ИЛИ D, $v \in W(D)$, и

$$\mathrm{UnrankVariant}(r, D): \mathbb{N}_{|W(D)|} \to W(D),$$

где $r \in \mathbb{N}_{|W(D)|}$.

Совокупность алгоритмов, определенных на последних двух шагах модифицированного метода (шаг 5 и 6), формирует биекцию $A \leftrightarrow \mathbb{N}$ и представляет собой алгоритмы комбинаторной генерации $\mathrm{Rank}(a): A \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{Unrank}(r): \mathbb{N} \to A$. Разработанная модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ отличается применением метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества. Изменение оригинального метода заключается в наличии дополнительных шагов (шаг 2 и 3), которые в случае успешного их выполнения позволяют воспользоваться методом построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ.

Заключение

В данной статье представлена модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ. В отличие от оригинальной версии метода, в предлагаемой модификации применяется метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества. Данное дополнение позволяет воспользоваться методом построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ для комбинаторных множеств, для которых известно выражение производящей функции для последовательности значений функции мощности.

Разработка модификации метода построения алгоритмов комбинаторной генерации выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №18-71-00059). Исследование свойств композиций производящих функций, в которых внешняя функция описывается двумя переменными, выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00201).

Литература

1. Кручинин В.В. Методы, алгоритмы и программное обеспечение комбинаторной генерации: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.11. – Томск, 2010. – 387 с.

2. Кнут Д.Э. Искусство программирования. – Т. 4А: Комбинаторные алгоритмы, ч. 1. – М.: Вильямс, 2013. – 960 с.

3. Ruskey F. Combinatorial generation. Working version (1j-CSC 425/520). – 2003. – 311 p. – URL: http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/SemWS17-18/Ruskey-Comb-Gen.pdf (дата обращения: 01.06.2019).

4. Loehr N. Combinatorics: Discrete mathematics and its applications. – USA: CRC Press, 2017. – 610 p.

5. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы: Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М.: Мир, 1980. – 433 с.

6. Kreher D.L. Combinatorial algorithms: Generation, enumeration, and search / D.L. Kreher, D.R. Stinson. – USA: CRC Press, 1999. – 329 p.

7. ECO method and the exhaustive generation of convex polyominoes / E. Barcucci, A. Del Lungo, E. Pergola, R. Pinzani // Journal of Difference Equations and Applications. – 1999. – Vol. 5. – P. 435–490.

8. Exhaustive generation of combinatorial objects by ECO / S. Bacchelli, E. Barcucci, E. Grazzini, E. Pergola // Acta Informatica. – 2004. – Vol. 40, No. 8. – P. 585–602.

9. Flajolet P. A calculus for the random generation of combinatorial structures / P. Flajolet, P. Zimmerman, B. Cutsem // Theoretical Computer Science. – 1994. – Vol. 132, No. 1–2. – P. 1–35.

10. Martinez C. A generic approach for the unranking of labeled combinatorial classes / C. Martinez, X. Molinero // Random Structures and Algorithms. – 2001. – Vol. 19, No. 3-4. – P. 472–497.

11. Рябко Б.Я. Быстрая нумерация комбинаторных объектов // Дискретная математика. – 1998. – Т. 10, № 2. – С. 101–119.

12. Медведева Ю.С. Быстрая нумерация комбинаторных объектов, находящая применение в системах передачи и хранения информации: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17. – Новосибирск, 2015. – 113 с.

13. Кручинин В.В. Методы построения алгоритмов генерации и нумерации комбинаторных объектов на основе деревьев И/ИЛИ. – Томск: В-Спектр, 2007. – 200 с.

14. Кручинин В.В. Представление множеств деревьями И/ИЛИ // Доклады ТУСУР. – 2008. – № 1(17). – С. 107–112.

15. Шабля Ю.В. Исследование метода построения алгоритмов генерации комбинаторных объектов на основе деревьев И/ИЛИ / Ю.В. Шабля, В.С. Мельман, А.С. Репкин // Электронные средства и системы управления: матер. докл. XIV Междунар. науч.-практ. конф. (28–30 ноября 2018 г.). – Томск: ТУСУР, 2018. – Ч. 2. – С. 20–22.

16. Технология прямого поиска при решении задач прикладной математики / В.А. Архипов, С.С. Бондарчук, И.Г. Боровской, А.А. Шелупанов // Вычислительные технологии. – 1995. – Т. 4, № 10. – С. 19–25.

17. Кручинин В.В. Степени производящих функций и их применение / В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин. – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2013. – 236 с.

18. Перминова М.Ю. Алгоритмы и программный модуль получения явных выражений коэффициентов производящих функций: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17. – Томск, 2017. – 113 с.

19. Shablya Y.V. Euler-Catalan's number triangle and its application / Y.V. Shablya, D.V. Kruchinin // Proceedings book of the Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (26–29 October 2018). – Antalya, 2018. – P. 212–216.

Шабля Юрий Васильевич
Аспирант каф. комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем (КИБЭВС) Томского государственного ун-та систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)
Красноармейская ул., д. 146, г. Томск, Россия, 634034
ORCID 0000-0002-9695-7493
Тел.: +7-906-949-03-07
Эл. почта: shablya-yv@mail.ru

Кручинин Дмитрий Владимирович
Канд. физ.-мат. наук, с.н.с. каф. КИБЭВС ТУСУРа
Красноармейская ул., д. 146, г. Томск, Россия, 634034
ORCID 0000-0003-3412-432X
Тел.: +7-913-845-99-04
Эл. почта: kruchinindm@gmail.com

Shablya Y.V., Kruchinin D.V.

Modification of the algorithm development method for combinatorial generation based on the application of the generating functions theory

In this article, a modification of the method for developing algorithms for combinatorial generation on the basis of and-or trees is presented. In contrast to the original version of the method, the proposed modification uses the method aimed at obtaining explicit expressions for the coefficients of generating functions. This method is applied to find an expression of the cardinality function of a combinatorial set by using the known expression of the generating function for the sequence of values of this cardinality function.

Keywords: combinatorial generation, and-or tree, generating function, method, ranking, unranking.
doi: 10.21293/1818-0442-2019-22-3-55-60

References

1. Kruchinin V.V. *Metody, algoritmy i programmnoe obespechenie kombinatornoj generacii. Diss. dokt. tekhn. nauk* [Methods, algorithms and software for combinatorial generation. Dr. eng. sci. diss.]. Tomsk, 2010, 387 p. (in Russ.).

2. Knuth D.E. The art of computer programming. Vol. 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. USA: Addison-Wesley, 2011, 883 p.

3. Ruskey F. Combinatorial generation. Working version (1j-CSC 425/520). 2003. 311 p. Available at: http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/SemWS17-18/Ruskey-Comb-Gen.pdf (Accessed: June 1, 2019).

4. Loehr N. Combinatorics: Discrete mathematics and its applications. USA: CRC Press, 2017, 610 p.

5. Reingold E.M., Nievergelt J., Deo N. Combinatorial Algorithms: Theory and Practice. Pearson Education Canada, 1977, 433 p.

6. Kreher D.L., Stinson D.R. Combinatorial algorithms: Generation, enumeration, and search. USA: CRC Press, 1999, 329 p.

7. Barcucci E., Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R. ECO method and the exhaustive generation of convex polyominoes. *Journal of Difference Equations and Applications*, 1999, vol. 5, pp. 435–490.

8. Bacchelli S., Barcucci E., Grazzini E., Pergola E. Exhaustive generation of combinatorial objects by ECO. *Acta Informatica*, 2004, vol. 40, no. 8, pp. 585–602.

9. Flajolet P., Zimmerman P., Cutsem B. A calculus for the random generation of combinatorial structures. *Theoretical Computer Science*, 1994, vol. 132, no. 1–2, pp. 1–35.

10. Martinez C., Molinero X. A generic approach for the unranking of labeled combinatorial classes. *Random Structures and Algorithms*, 2001, vol. 19, no. 3–4, pp. 472–497.

11. Ryabko B.Ya. [Fast enumeration of combinatorial objects]. *Discrete Mathematics and Applications*, 1998, vol. 8, no. 2, pp. 163–182 (in Russ.).

12. Medvedeva Yu.S. *Bystraja numeracija kombinatornyh obektov, nahodjashhaja primenenie v sistemah peredachi i hranenija informacii. Diss. kand. tekhn. nauk* [Fast numbering of combinatorial objects, which is used in information transmission and storage systems. Cand. eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2015, 113 p. (in Russ.).

13. Kruchinin V.V. *Metody postroenija algoritmov generacii i numeracii kombinatornyh obektov na osnove derevev I/ILI* [Methods for developing algorithms for ranking and unranking combinatorial objects based on and-or trees]. Tomsk, 2007, 200 p. (in Russ.).

14. Kruchinin V.V. *Predstavlenie mnozhestv derevjami I/ILI* [Representation of sets by and-or trees]. *Proceedings of TUSUR University*, 1998, no. 1(17), pp. 107–112 (in Russ.).

15. Shablya Y.V., Melman V.S., Repkin A.S. [Analysis of the method for developing algorithms for combinatorial generation on the basis of and-or trees]. *Proceedings of the International Scientific Conference on Electronic Devices and Control Systems (28-30 November 2018)*. Tomsk, TUSUR, 2018, vol. 2, pp. 20–22 (in Russ.).

16. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Borovskoy I.G., Shelupanov A.A. *Tekhnologiya pryamogo poiska pri reshenii zadach prikladnoy matematiki* [Direct search technology for solving problems of applied mathematics]. Vychislitelnyye tekhnologii, 1995, vol. 4, no. 10, pp. 19–25.

17. Kruchinin V.V., Kruchinin D.V. *Stepeni proizvodjashhih funkcij i ih primenenie* [Powers of generating functions and their application]. Tomsk, 2013. 236 p. (in Russ.).

18. Perminova M.Yu. *Algoritmy i programmnyj modul poluchenija javnyh vyrazhenij kojefficientov proizvodjashhih funkcij. Diss. kand. tekhn. nauk* [Algorithms and software module for obtaining explicit expressions for the coefficients of generating functions. Cand. eng. sci. diss.]. Tomsk, 2017. 113 p. (in Russ.).

19. Shablya Y.V., Kruchinin D.V. Euler-Catalan's number triangle and its application. *Proceedings book of the Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (26-29 October 2018)*. Antalya, 2018, pp. 212–216.

Yuriy V. Shablya
PhD student, Department of Complex Information Security of Computer Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR)
146, Krasnoarmeyskaya st., Tomsk, Russia, 634034
ORCID 0000-0002-9695-7493
Phone: +7-906-949-03-07
Email: shablya-yv@mail.ru

Dmitry V. Kruchinin
Candidate of Science in Physics and Mathematics,
Senior Researcher, Department of Complex Information Security of Computer Systems, TUSUR
146, Krasnoarmeyskaya st., Tomsk, Russia, 634034
ORCID 0000-0003-3412-432X
Phone: +7-913-845-99-04
Email: kruchinindm@gmail.com