

УДК 621.371: 519.633

Ю.П. Акулиничев, А.В. Могильников

Простая аппроксимация дискретной функции Грина в частотной области при численном решении параболического уравнения

Рассматривается задача расчета параметров электромагнитного поля путем численного решения параболического уравнения методом дискретного преобразования Фурье с расщеплением. Определены точные значения коэффициентов передачи отрезков плоских волн от источника излучения на расстояние x в однородной среде (дискретная функция Грина для спектральной области) и описан характер их зависимости от поперечного размера прямоугольной области расчета. Для ближней зоны предложена простая экспоненциальная аппроксимация дистанционной зависимости этих коэффициентов, использование которой не меняет традиционного алгоритма расчета, но существенно повышает его точность.

Ключевые слова: распространение радиоволн, параболическое уравнение, метод дискретного преобразования Фурье.

doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-4-1-16-21

Моделирование процессов распространения радиоволн (РРВ) в неоднородной среде над поверхностью Земли является важным и чрезвычайно полезным инструментом исследований в области радиолокации, радионавигации и беспроводной связи. В последние десятилетия широко применяется математическая модель РРВ в виде параболического уравнения (ПУ). Впервые оно было получено и использовано в работах М.А. Леонтовича и В.А. Фока при анализе дифракции радиоволн над сферической земной поверхностью [1] для линейной модели атмосферы и приземного канала [2].

Сначала ради простоты рассмотрим уравнение Гельмгольца для электромагнитного поля (ЭМП) $\Psi(x, z)$, т.е. цилиндрической волны, в среде с индексом преломления $n(x, z)$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n(x, z)^2 \right\} \Psi(x, z) = 0, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Скалярное ПУ (2) определяется из (1) на основе малоуглового приближения при следующих допущениях. Распространение радиоволны происходит вдоль положительного направления оси Ox при малых углах рассеяния. ЭМП имеет либо вертикальную, либо горизонтальную поляризацию и соответственно определяется поперечной составляющей либо магнитного $\Psi(x, z) = H_y(x, z)$, либо электрического поля $\Psi(x, z) = E_y(x, z)$ [3]. Тогда ПУ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} + k^2 (n(x, z)^2 - 1) u(x, z) = 0, \quad (2)$$

где $u(x, z) = \exp(-ikx)\Psi(x, z)$ – огибающая ЭМП.

При решении практических задач используют численные методы решения ПУ (2). На расчетную область «дальность–высота» накладывается прямоугольная сетка. Расчет поля ведется в её узлах, нанесенных в пространстве на расстояния шагов дискретизации по дальности Δx и высоте Δz . При этом в соответствии с теоремой отсчетов максимально до-

пустимое отклонение вектора Пойнтинга от направления оси Ox составляет $\beta_{\max} = \lambda/(2\Delta z)$.

На сегодняшний день наиболее распространёнными численными методами решения ПУ являются метод дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с расщеплением, метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ) [4–6]. МКР и МКЭ базируются на решении систем линейных уравнений при заданных граничных условиях, что позволяет использовать экономное решение методом прогонки [7]. Для МКР и МКЭ существуют способы задания граничных условий, которые практически исключают влияние поперечного размера сетки на точность расчетов поля [8–10]. Однако МКР и МКЭ при увеличении частоты распространяющейся волны и точности расчета требуют существенно уменьшать шаги дискретизации Δx и Δz , что приводит к резкому увеличению затрачиваемой вычислительной мощности или времени расчета, особенно при решении ПУ в трехмерном пространстве или над неровной земной поверхностью [11]. Метод ДПФ менее зависим от подобных факторов, поэтому на сегодняшний день он остается наиболее востребованным методом и лежит в основе работы таких программ, как TEMPER и AREPS, результаты применения которых считаются эталонными при прогнозировании РРВ в неоднородной атмосфере. При этом использование искусственного поглощающего слоя пока является единственным способом задать неотражающие граничные условия [12, 13].

Метод дискретного преобразования Фурье с расщеплением

Впервые численное решение ПУ с помощью преобразования Фурье с расщеплением предложили R.H. Hardin и F.D. Tappert в 1973 г. [14]. Позднее метод был успешно применен и адаптирован к использованию на ЭВМ при моделировании тропосферного РРВ [4]. Однако суть метода всегда оставалась неизменной.

На дальности x поле $u(x, z)$ с помощью прямого ДПФ F разлагается в угловой спектр плоских волн (гармоник ряда Фурье, располагающихся с шагом по

углу $\Delta\beta = 2\beta_{\max}/\lambda$ и умножается на передаточную функцию спектра на расстояние Δx (т.е. на коэффициенты передачи гармоник ряда Фурье). К полученным значениям применяется обратное ДПФ, и в результате получается распределение поля по высоте на расстоянии $x+\Delta x$, которое в соответствии с сущностью метода расщепления умножается на фазовый множитель, учитывающий рассеяние радиоволн на атмосферных неоднородностях. Таким образом, на каждом шаге по дальности необходимо выполнить операции

$$u(x+\Delta x, z) = e^{ik(n^2-1)\Delta x/2} F^{-1}\{K_{\text{тр}}(\beta) \cdot F[u(x, z)]\}, \quad (3)$$

где $K_{\text{тр}}(\beta_j) = \exp(-ik\beta_j^2\Delta x/2)$ – традиционный (применяющийся уже в течение нескольких десятилетий) коэффициент передачи j -й гармоники ряда Фурье, распространяющейся под углом β_j на расстояние Δx [3, 4, 15].

Эти коэффициенты $K_{\text{тр}}(\beta)$ получены путем формального решения ПУ в безграничной области. На практике же область расчета ограничена по высоте некоторым значением $z_{\max} = L$, что приводит к появлению серьезных амплитудных ошибок, которые частично компенсируют с помощью поглощающих слоёв в виде оконных функций или увеличением поперечного размера области расчета L [3, 16].

Целью данной работы является получение такой передаточной функции $K(\beta)$, применение которой приводило бы к уменьшению ошибки расчета поля в ограниченной однородной ($n=1$) расчетной области без использования каких-либо поглощающих слоев. Поскольку влияние поглощающего слоя формально аналогично влиянию неоднородностей среды, оба эти фактора можно учитывать совместно в рамках метода расщепления.

Содержание работы

Функцию, определяющую коэффициент передачи поля от элементарного источника, расположенного в точке $(x_1, m\Delta z)$, в точку $(x_1+x, n\Delta z)$, называют дискретной функцией Грина (ДФГ)

$$G_{n,m}(x) = \frac{0,5}{\beta_{\max}} \int_{-\beta_{\max}}^{\beta_{\max}} \exp\left[-ik\left(\frac{x\beta^2}{2} + \Delta z(n-m)\beta\right)\right] d\beta. \quad (4)$$

Таким же образом функцию, определяющую коэффициент преобразования p -й гармоники в q -ю гармонику при РРВ на расстояние x , назовем дискретной функцией Грина в частотной области (ДФГЧ) и определим с помощью двойного дискретного преобразования Фурье от (4)

$$K_{q,p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} G_{n,m}(x) \exp\left[ik\Delta z(m\beta_p - n\beta_q)\right], \quad (5)$$

где N – число узлов дискретной сетки по высоте.

Используя формулу суммы конечного числа членов геометрической прогрессии и формулы Эйлера [17], получим точное выражение

$$K_{q,p}(x) = A_{q,p} \int_{-\beta_{\max}}^{\beta_{\max}} \exp\left[-ikx\beta^2/2\right] \times$$

$$\times \frac{\sin\left[k_1 N(\beta - \beta_q)\right] \sin\left[k_1 N(\beta - \beta_p)\right]}{\sin\left[k_1(\beta - \beta_q)\right] \sin\left[k_1(\beta - \beta_p)\right]} d\beta, \quad (6)$$

где $A_{q,p} = \frac{\Delta z}{\lambda N} \exp\left[ik_1(N-1)(\beta_p - \beta_q)\right]$, $k_1 = k\Delta z/2$.

Известно, что в однородной безграничной среде плоские волны распространяются независимо с постоянной амплитудой и без взаимных преобразований. Выражение (6) показывает, что при проведении расчета в ограниченной пространственной области оба утверждения перестают быть справедливыми, поскольку здесь вместо плоских волн бесконечной протяженности мы имеем дело лишь с их сегментами протяженности L .

Интеграл в выражении (6), по-видимому, не относится к числу табличных, да и характер зависимости от дальности x является довольно сложным, т.е., оно малоприспособно для практических расчетов. Поэтому, чтобы радикально не менять традиционный алгоритм метода ДПФ (3), не будем учитывать наличие взаимного преобразования гармоник, т.е. считаем $\beta_p = \beta_q$. Тогда, введя замену $\gamma = \beta - \beta_p$ и полагая $\Delta z \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, (6) преобразуем в более простое выражение

$$K(x; \beta_p) = \frac{L}{\lambda} \exp\left(-ikx\beta_p^2/2\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ikx(\gamma^2 + 2\gamma\beta_p)/2\right] \frac{\sin^2(\pi\gamma L/\lambda)}{(\pi\gamma L/\lambda)^2} d\gamma, \quad (7)$$

где $L = N\Delta z$ – поперечный размер области расчета.

Далее выполняем обратное преобразование Фурье каждого из сомножителей в подынтегральном выражении, воспользуемся теоремой Парсеваля и после элементарных математических преобразований [17] вместо (7) получим

$$K(x, \beta_p) = \frac{L}{\sqrt{\lambda x}} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{kx\beta_p^2}{2}\right)\right] \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{|x\beta_p|}{L}\right) \exp\left[-i\frac{k}{2x}(x\beta_p - z)^2\right] dz \right\}, \quad (8)$$

где $|x\beta_p| \leq L$, иначе $K(x, \beta_p) = 0$.

При $x \ll \pi L^2/\lambda$, т.е. когда радиус первой зоны Френеля намного меньше поперечного размера области расчета (этот размер велик или расстояние x мало), интеграл в (8) можно вычислить с помощью метода стационарной фазы [17]

$$K(x, \beta_p) \approx \begin{cases} \left(1 - \frac{|x\beta_p|}{L}\right) \exp(-ikx\beta_p^2/2), & x \leq L/|\beta_p|, \\ 0, & x > L/|\beta_p|. \end{cases} \quad (9)$$

Выражение (9) отличается от традиционной передаточной функции метода ДПФ $K_{\text{тр}}(\beta)$ (3) наличием дополнительного амплитудного множителя. Это

характеризует тот известный факт, что отрезок плоской волны, распространяющийся под углом β_p к оси Ox , на некотором расстоянии $x_{\text{вых}} \approx L/|\beta_p|$ полностью выходит из расчетной области (рис. 1) [18].

Было проведено сравнение результатов расчета поля на различных дальностях, полученных методом ДПФ при использовании (9), с эталонными результатами $K_{\text{эт}}(x)$. Входное поле при $x = 0$ в обоих случаях задавалось отрезком плоской волны размером L . Но эталонные результаты $K_{\text{эт}}(x)$ получены в расчетной области, размеры которой во много раз больше L , что на малых расстояниях устраняет влияние граничной области на точность расчета. При этом эпизодически проверялось, что более трудоемкий путь с использованием точного выражения (6) дает те же значения.

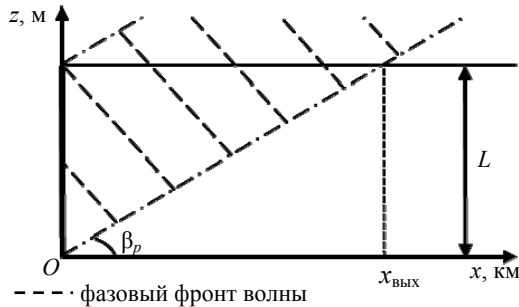


Рис. 1. Схема распространения отрезка плоской волны

Сравнение результатов показало, что отличие эталонных коэффициентов передачи гармоник ряда Фурье $K_{\text{эт}}(x)$ и коэффициентов (9) на разных дальностях составляет от одного до двух процентов. Исходя из этого факта, можно утверждать, что (9) является точной аппроксимацией эталонной функции Грина в ближней зоне для метода ДПФ. При этом существенная разница между (9) и $K_{\text{эт}}(x)$ наблюдается лишь на расстояниях $x > (0,95 \dots 1)L/|\beta_0|$, но эталонные значения всегда остаются больше нуля вследствие того, что на этих расстояниях возрастает роль взаимных преобразований одних гармоник в другие (рис. 2).

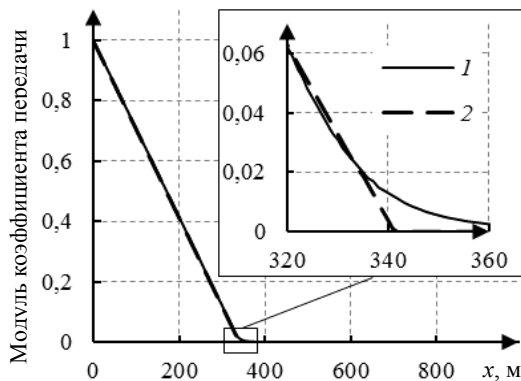


Рис. 2. Модуль коэффициента передачи отрезка плоской волны при $\beta = 0,375$ рад: 1 – эталонного; 2 – определенно согласно (9); $N = 512$; $\lambda = 0,3$ м; $\Delta x = 1$ м; $\Delta z = \lambda/2$

Во избежание дублирования результатов с помощью нормировки пространственных переменных

$$x_H = x/\Delta x_{\text{max}}, z_H = z/\Delta z_{\text{max}}, \beta_H = \beta_p/\beta_{\text{max}}, \quad (10)$$

$$\Delta x_{\text{max}} = \lambda/\beta_{\text{max}}^2, \Delta z_{\text{max}} = \lambda/(2\beta_{\text{max}}) \quad (11)$$

был проведен переход от стандартного (2) к нормированному ПУ

$$\frac{\partial u(x_H, z_H)}{\partial x_H} = \frac{i}{\pi} \frac{\partial^2 u(x_H, z_H)}{\partial z_H^2} + i \frac{\pi}{\beta_{\text{max}}^2} (n^2 - 1) u(x_H, z_H). \quad (12)$$

Точная аппроксимация эталонных коэффициентов передачи $K_{\text{эт}}(x)$ (9) тогда принимает вид

$$K(x_H, \beta_H) \approx \begin{cases} \left[1 - \frac{|x_H \beta_H|}{L_1} \right] e^{-i \frac{\pi x_H \beta_H^2}{2}}, & x_H \leq L_1/|\beta_H|, \\ 0, & x_H > L_1/|\beta_H|, \end{cases} \quad (13)$$

где $L_1 = N\beta_{\text{max}}$.

Как будет показано далее, при использовании коэффициентов (13) ошибки расчета поля по отношению к эталонным значениям могут составлять сотые доли процента. Однако, несмотря на столь впечатляющий результат, возможности использования выражения (13) весьма ограничены. Дело в том, что в неоднородной среде каждая неоднородность фактически является источником вторичного излучения, и обеспечение линейной зависимости модуля коэффициента передачи от расстояния совместно для каждого такого источника является весьма трудоемкой задачей.

Поэтому нужно найти свободную от этого недостатка аппроксимацию эталонной функции $K_{\text{эт}}(x)$. После обработки результатов эталонных расчетов поля при различных параметрах расчетной области такая аппроксимация была найдена

$$K_{\text{ан}}(x_H, \beta_H) = \exp \left[x_H \left(-3,44 - 11,92 \frac{\beta_H}{N} - i \frac{\pi \beta_H^2}{\beta_{\text{max}}^2} \right) \right]. \quad (14)$$

Эта функция, как и (13), также отличается от традиционной наличием дополнительного амплитудного множителя, однако с дальностью он изменяется не линейно, а экспоненциально.

Естественно, такая простая аппроксимация (14) работает не так хорошо, как (13) (рис. 3).

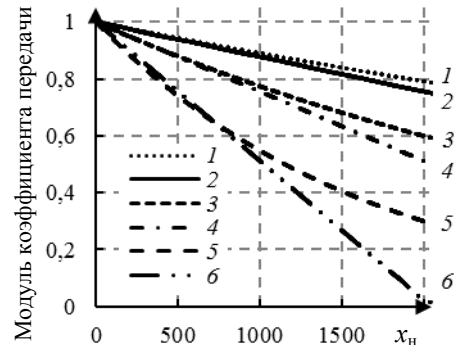


Рис. 3. Модули эталонных коэффициентов передачи отрезка плоской волны при $\beta_H = 0,0313$; $0,0625$; $0,125$ (кривые 2, 4, 6 соответственно) и их аппроксимации, определенные согласно (14) (кривые 1, 3, 5 соответственно). $N = 1024$, $\Delta x_H = 1$, $\Delta z_H = 1$

Наибольшие отличия от эталона наблюдаются для гармоник, близких к $\pm\beta_{\max}$ (рис. 4). Однако применение (14) на практике абсолютно оправдано. Во-первых, это не требует изменения самого метода ПФ, меняется лишь показатель экспоненты, харак-

теризующей коэффициенты передачи гармоник ряда Фурье. Во-вторых, такое небольшое изменение повышает точность расчета поля на десятки и сотни процентов при любом размере расчетной области N (рис. 5).

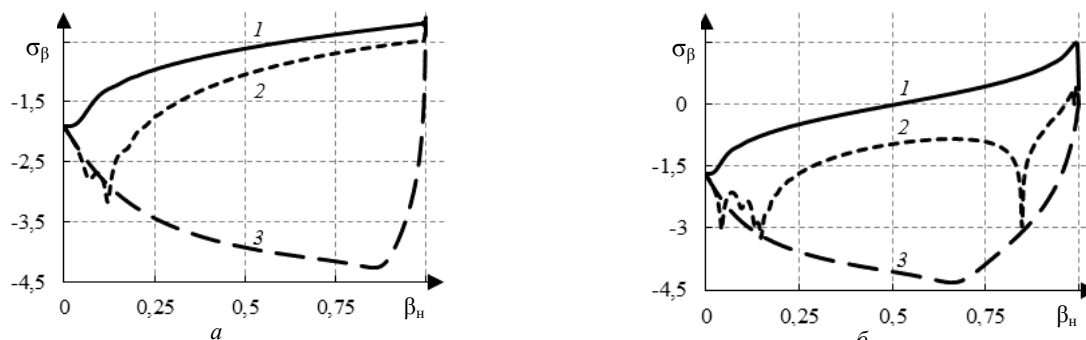


Рис. 4. Зависимость десятичного логарифма относительной СКО определения коэффициентов передачи гармоник ряда Фурье σ_β от угла распространения отрезка плоской волны β_n на расстояниях $x_n=100$ (а) и $x_n=250$ (б) при использовании: 1 – традиционных коэффициентов $K_{\text{тр}}(\beta_n)$, 2 – аппроксимации $K_{\text{ан}}(x_n, \beta_n)$ (14), 3 – аппроксимации $K(x_n, \beta_n)$ (13). $N=512$, $\Delta x_n=1$, $\Delta z_n=1$

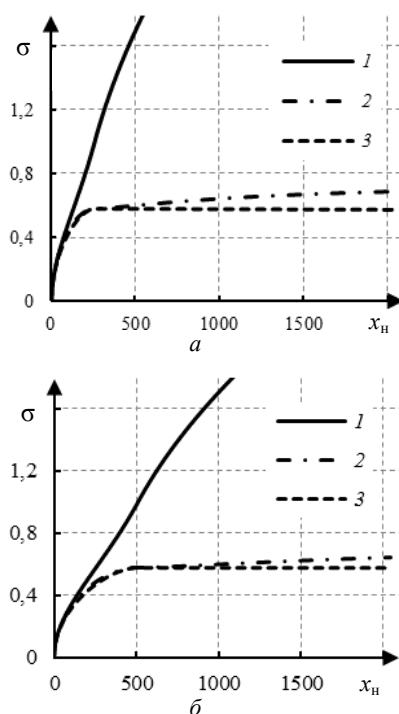


Рис. 5. Зависимость относительной СКО расчета поля σ от дальности x_n при $N = 512$ (а) и $N = 1024$ (б) при использовании: 1 – традиционных коэффициентов $K_{\text{тр}}(\beta_n)$; 2 – аппроксимации $K_{\text{ан}}(x_n, \beta_n)$ (14); 3 – эталонных коэффициентов; $\Delta x_n = 1$; $\Delta z_n = 1$

Заключение

Приведенные результаты показывают, что имеются возможности существенно повысить точность численного решения параболического уравнения методом дискретного преобразования Фурье. Этого можно достигнуть, даже не меняя традиционный алгоритм, но изменив численные значения входящих в него параметров, т.е. без дополнительных вычислительных затрат. Дальнейшее совершенствование метода возможно при переходе от идеологии чис-

ленного решения уравнения в частных производных к идеологии решения соответствующего интегрального уравнения.

Работа выполнена в рамках проекта по госзаданию Минобрнауки № 8.7348.2017/8.9.

Литература

1. Леонтович М.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения / М.А. Леонтович, В.А. Фок // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16, № 7. – С. 557–573.
2. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970. – 517 с.
3. Levy M. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. – London: IEE, 2000. – 336 p.
4. Kuttler J.R. Theoretical description of the parabolic approximation. Fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere / J.R. Kuttler, G.D. Dockery // Radio Sci. – 1991. – Vol. 26, No. 2. – P. 381–393.
5. Marcus S. Domain decomposition for finite difference solutions of parabolic equations in wave propagation / S. Marcus and D. Degani // Proc. Antennas and Propagation Society Int. Symp. Dig. – Seattle, WA, 1994. – P. 2088–2091.
6. Iqbal A. Numerical evaluation of radiowave propagation in evaporation ducts using FEM / A. Iqbal, V. Jeoti // Nat. Postgraduate Conf. (NPC). – Kuala-Lumpur, Malaysia, 2011, P. 1–6.
7. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
8. Sirkova I. Local transparent boundary condition applied to the modeling of tropospheric ducting propagation / I. Sirkova and H. E. Hernandez-Figueroa // Microwave Opt. Technol. Lett. – 1999. – Vol. 21, No. 5. – P. 343–346.
9. Sirkova I. Parabolic wave equation method applied to the tropospheric ducting propagation problem: A survey / I. Sirkova, M. Mikhalev // Electromagnetics. – 2006. – Vol. 26, No. 2. – P. 155–173.
10. A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrodinger Equations / X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt, A. Schadle // Communications in computational physics. – 2008. – Vol. 4, No. 4. – P. 729–796.

11 Apaydin G. Numerical investigations of and path loss predictions for surface wave propagation over sea paths including hilly island transitions / G. Apaydin, L. Sevgi // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – 2010. – Vol. 58, No. 4. – P. 1302–1314.

12. An overview of recent advances for the TEMPER radar propagation model / G.D. Dockery, R.S. Awadallah, D.E. Freund, J.Z. Gehman, M.H. Newkirk // *IEEE Radar Conf.* – NJ: Piscataway, 2007. – P. 896–905.

13. Patterson W.L. Advanced refractive effects prediction system (AREPS) // *IEEE Radar Conf.* – Waltham, MA, 2007. – P. 891–895.

14. Hardin R.H. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations / R.H. Hardin, F.D. Tappert // *Siam Rev.* – 1973. – Vol. 15, No. 2. – 423 p.

15. Parabolic Equation Modeling of Propagation over Terrain Using Digital Elevation Model / Xiao-Wei Guan, Li-Xin Guo, Ya-Jiao Wang, and Qing-Liang Li // *International Journal of Antennas and Propagation.* – 2018. – URL: <https://www.hindawi.com/journals/ijap/2018/1878307/> (дата обращения: 23.11.18).

16. Форма оптимального искусственного поглощающего слоя для численного решения параболического волнового уравнения методом ДПФ / Ю.П. Акулиничев, А.В. Могильников, М.А. Колединцева // VII Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы радиофизики», Томск, 18–22 сентября 2017 г. – Томск: STT, 2017. – С. 61–64.

17. Градштейн И.С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

18. Коррекция применения метода БПФ численного решения параболического волнового уравнения / Ю.П. Акулиничев, М.А. Колединцева, А.В. Могильников // Тр. XXV Всерос. открытой науч. конф. «Распространение радиоволн», Томск, 4–9 июля 2016 г. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2016. – Т. III. – URL: http://symp.iao.ru/files/symp/rwp/25/ru/abstr_8303.pdf (дата обращения: 15.12.18).

Акулиничев Юрий Павлович

Д-р техн. наук, профессор каф. радиотехнических систем (РТС) Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) Ленина пр-т, д. 40, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7-931-806-80-01
Эл. почта: aupa1941@mail.ru

Могильников Андрей Владимирович

Студент каф. РТС ТУСУРа
Ленина пр-т, д. 40, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7-923-427-41-22
Эл. почта: mog.v.andrey@yandex.ru

Akulinichev Yu.P., Mogilnikov A.V.

Simple approximation of the discrete Green's function in the frequency domain for the numerical solution of the parabolic equation

A problem of calculation of electromagnetic field parameters by means of numerical solution of the parabolic equation using the discrete Fourier transform method with splitting is considered. The exact values of the transmission coefficients of the plane wave segments from the radiation source to a

distance x in a homogeneous medium (discrete Green's function for the spectral region) are determined and the nature of their dependence on the transverse size of the rectangular region is described. A simple exponential approximation of the distance dependence for these coefficients for the near zone is proposed, the use of this approximation does not change the conventional calculation algorithm but significantly increases its accuracy.

Keywords: radio wave propagation, parabolic equation, discrete Fourier transform method.

doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-4-1-16-21

References

1. Leontovich M.A., Fok V.A. Solution of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the method of parabolic equations // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1946, Iss. 16, pp. 13–23.
2. Fock V.A. *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*. N.Y., USA, Pergamon Press, 1965. 425 p.
3. Levy M. *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation*. London, IEE, 2000. 336 p.
4. J. R. Kuttler and G. D. Dockery, Theoretical description of the parabolic approximation/Fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere. *Radio Sci.*, 1991, vol. 26, no. 2, pp. 381–393.
5. S. Marcus and D. Degani, Domain decomposition for finite difference solutions of parabolic equations in wave propagation // *Proc. Antennas and Propagation Society Int. Symp. Dig.*, Seattle, WA, 1994, pp. 2088–2091.
6. A. Iqbal and V. Jeoti, “Numerical evaluation of radio-wave propagation in evaporation ducts using FEM”. *Nat. Postgraduate Conf.* (NPC), Kuala-Lumpur, Malaysia, 2011, pp. 1–6.
7. Samarskiy A.A. *Vvedeniye v chislennyye metody* [Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978. 288 с.
8. Sirkova I., Hernandez-Figueroa H.E. Local transparent boundary condition applied to the modeling of tropospheric ducting propagation. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 1999, vol. 21, no. 5, pp. 343–346.
9. Sirkova I., Mikhalev M. Parabolic wave equation method applied to the tropospheric ducting propagation problem: A survey. *Electromagnetics*, 2006, vol. 26, no. 2, pp. 155–173.
10. Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schadle A. A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrodinger Equations // *Communications in computational physics*. 2008. vol. 4, no. 4, pp. 729–796.
11. Apaydin G., Sevgi L. Numerical investigations of and path loss predictions for surface wave propagation over sea paths including hilly island transitions, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 2010, vol. 58, no. 4, pp. 1302–1314.
12. Dockery G.D., Awadallah R.S., Freund D.E., Gehman J.Z., Newkirk M.H. An overview of recent advances for the TEMPER radar propagation model. *IEEE Radar Conf.*, Piscataway, NJ, 2007, pp. 896–905.
13. Patterson W.L. Advanced refractive effects prediction system (AREPS). *IEEE Radar Conf.*, Waltham, MA, 2007, pp. 891–895.
14. Hardin R.H., Tappert F.D. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // *Siam Rev.* 1973, vol. 15, no. 2. 423 p.
15. Parabolic Equation Modeling of Propagation over Terrain Using Digital Elevation Model / Xiao-Wei Guan, Li-

Xin Guo, Ya-Jiao Wang, Qing-Liang Li // *International Journal of Antennas and Propagation*. 2018. URL: <https://www.hindawi.com/journals/ijap/2018/1878307/> (accessed: November 23, 2018).

16. Akulynychev Yu.P., Mohyl'nykov A.V., Koledyntseva M.A. Forma optimal'nogo iskusstvennogo pogloshchayushchego sloya dlya chislennogo resheniya parabolicheskogo volnovogo uravneniya metodom DPF [The shape of the optimal artificial absorbing layer for the numerical solution of the parabolic wave equation by the DFT method] // *VII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. «Aktual'nyye problemy radiofiziki»* [VII International Scientific and Practical Conference «Actual Problems of Radiophysics»], Tomsk: STT, 2017, pp. 61–64 (in Russ.).

17. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov summ, ryadov i proizvedeniy* [Table of Integrals, Series, and Products], M.: Fizmatgiz, 1963. 1100 p.

18. Akulynychev Yu.P., Mohyl'nykov A.V., Koledyntseva M.A. Korrektsiya primeneniya metoda BPF chislennogo resheniya parabolicheskogo volnovogo uravneniya [Correction of the application of the FFT method for the numerical solution of the parabolic wave equation] // *XXV Vseros. otkrytaya nauch. kon. «Rasprostraneniye radiovoln»* [XXV All-

Russian Open Scientific Conference «Radio Wave Propagation»]: Tomsk: TUSUR publ., 2016, vol. III (in Russ.).

Yuri P. Akulinichev

Doctor of Engineering, Professor,
Department of Radio Engineering Systems (RES)
Tomsk State University of Control Systems
and Radioelectronics (TUSUR)
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7-931-806-80-01
Email: aupa1941@mail.ru

Andrey V. Mogilnikov

Student, Department of Radio Engineering Systems (RES)
Tomsk State University of Control Systems
and Radioelectronics (TUSUR)
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7-923-427-41-22
Email: mog.v.andrey@yandex.ru