УДК 519.177:316.353

А.А. Ефремов, Е.Е. Лунева, П.И. Банокин, Е.А. Кочегурова

Использование процедуры ранжирования Кендалла–Уэя для идентификации ключевых игроков социального графа

Рассмотрена возможность применения ранжирования Кендалла–Уэя для определения подмножества пользователей социальной сети, являющихся экспертами в заданной предметной области. Проведено сравнение рассматриваемой процедуры с широко используемыми дистанционными методами, основанными на вычислении информационной энтропии графа и показателя Боргатти. Результаты, полученные в ходе модельного эксперимента, позволяют утверждать, что процедура ранжирования Кендалла–Уэя не уступает известным методам в способности решать поставленную задачу, обладая при этом более простой программной реализацией.
Ключевые слова: социальный граф, ключевые игроки, дистанционные методы, орграф, ранжирование.
doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-1-80-85

Современный мир немыслим без социальных сетей. С каждым годом возрастает количество их пользователей, при этом один и тот же пользователь может быть участником нескольких социальных сетей. Такой уровень вовлеченности современного человека в процесс виртуального общения в совокупности с привычкой получать и обмениваться информацией посредством онлайн-платформ, без сомнения, вызывает интерес рекламодателей, социологических служб и государственных структур.

Анализ данных, получаемых из социальных сетей, позволяет решать широкий круг задач: от прогнозирования спроса на товар или услугу до мониторинга общественного мнения граждан [1, 2]. При этом с целью повышения эффективности анализа необходимо определять множество пользователей, рассматриваемых в качестве лидеров общественного мнения по заданной тематике или в заданной предметной области. Подобная задача описана в [3] как задача KPP-POS (Key Players Problem – Positive). Основным подходом к ее решению считается использование дистанционных методов теории графов, учитывающих длины путей между вершинами социального графа [4–6]. Наиболее эффективными среди таких методов считаются методы, основанные на расчете информационной энтропии [7] и показателя Боргатти [8].

Следует отметить, что упомянутые выше дистанционные методы позволяют получить хорошие результаты при условии, что социальный граф является невзвешенным и/или неориентированным. Использование таких графов значительно сокращает их способность адекватно представлять реальную группу пользователей социальных сетей, поскольку не позволяет учитывать дополнительную информацию об отношениях между пользователями.

Предлагаемый в данной работе подход к определению группы наиболее влиятельных пользователей основан на использовании процедуры ранжирования Кендалла–Уэя [9, 10], определяющей относительные «силы» вершин графа. Этот метод, предназначенный в первую очередь для анализа турниров, нашел применение в области спортивной статистики [9, 11].

Целью данной работы является сравнительный анализ применимости процедуры ранжирования Кендалла–Уэя (РКУ) для задачи определения подмножества пользователей социальной сети, рассматриваемых в качестве экспертов по заданной тематике, на основе данных модельных экспериментов.

Описание процедуры ранжирования

В теории графов известна задача ранжирования игроков по итогам кругового турнира [12–14]. Для решения этой задачи составляется полный ориентированный граф без петель с числом вершин n, равным количеству игроков. При этом любые две вершины соединены дугой, и дуга из i-й вершины в j-ю означает победу i-го игрока над j-м. В матрице смежности $\mathbf{A}$ турнира элемент $a_{ij}=1$, если существует дуга из i-й вершины в j-ю; иначе, $a_{ij}=0$.

Сумма элементов i-й строки $s_i^{\langle 1\rangle}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$ соответствует количеству побед, одержанных i-м игроком в ходе турнира, и является мерой силы i-го игрока. Вектор $\mathbf{S}^{\langle 1\rangle}$, составленный из элементов $s_i^{\langle 1\rangle}$, называется вектором сил первого порядка [9].

В тривиальном случае все элементы вектора $\mathbf{S}^{\langle 1\rangle}$ различны, и ранжирование игроков не представляет сложности. Однако если по итогам турнира несколько игроков одержали одинаковое количество побед (набрали одинаковое количество очков), однозначное ранжирование игроков может быть затруднительным [14, 15].

Процедура РКУ предполагает вычисление итерированных сил k-го порядка игроков по одной из следующих формул:

$$\mathbf{S}^{\langle k\rangle}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{S}^{\langle k-1\rangle};$$

$$\mathbf{S}^{\langle k\rangle}=\mathbf{A}^{k}\cdot\mathbf{S}^{\langle 1\rangle},$$

где $k\geq 2$ – номер итерации; $\mathbf{A}$ – матрица смежности; $\mathbf{S}^{\langle j\rangle}$ – вектор итерированных сил j-го порядка.

При этом больший интерес представляют относительные силы σ_i игроков [6, 10], определяемые как

$$\sigma_i = \lim_{k\to\infty} \frac{s_i^{\langle k\rangle}}{\sum_{j=1}^{n} s_j^{\langle k\rangle}}.$$

В работах [9, 10, 16, 17] показано, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$, составленный из элементов σ_i, сходится к нормализированному собственному вектору матрицы $\mathbf{A}$, соответствующему ее спектральному радиусу, т.е. собственному значению с наибольшей абсолютной величиной [18, 19]. Таким образом, РКУ сводится к задаче нахождения собственного вектора матрицы смежности.

В своей работе [16] Берж показал, что подобный подход может использоваться не только для турниров, но и для любых направленных графов, в частности, для социальных графов [20–22].

Обозначим простой (невзвешенный) социальный граф как $G=(V,E)$, где $V=\{v_i\}$ – непустое множество вершин графа, $E=\{e_{ij}\}, E\subseteq V^2$ – множество дуг; при этом $e_{ij}=(v_i,v_j)$ – дуга, направленная из вершины v_i в v_j ($i,j=1,2,...,n$). В случае взвешенного социального графа определение дополняется весовой функцией $w:E\to(0,1]$, ставящей в соответствие каждой дуге e_{ij} вес $w_{ij}=w(e_{ij})$.

Для решения задачи поиска пользователей социальной сети, рассматриваемых как экспертов в заданной тематической области, необходимо построение социального графа $G=(V,E,w)$, в котором вес дуги w_{ij} соответствует заинтересованности *j*-го пользователя сообщениями *i*-го [23]. В этом случае для процедуры РКУ вместо матрицы смежности необходимо использовать матрицу весов $\mathbf{W}=w(\mathbf{A})$, составленную из элементов w_{ij}. Следует отметить, что в отличие от матрицы турниров матрица смежности и матрица весов произвольного социального графа не являются симметричными.

Постановка эксперимента

Существуют различные подходы к определению ключевых игроков социальной сети, среди которых наибольшей известностью пользуются дистанционные методы, основанные на расчете информационной энтропии и показателя Боргатти. Подробное описание этих методов и сравнение эффективности их применения приведено в [23]. Следует отметить сравнительно большую алгоритмическую сложность упомянутых выше показателей, поскольку они подразумевают поочередное удаление вершин и дуг и пересчета числовых значений.

Для сравнения процедуры определения ключевых игроков социальной сети методом РКУ с методами, основанными на расчете информационной энтропии и показателя Боргатти, был сгенерирован невзвешенный турнир с числом вершин $n=100$, а также невзвешенный социальный граф без петель с тем же количеством вершин; при этом была задана вероятность дуги из *i*-й вершины в *j*-ю $p=0{,}075$. В итоге был получен простой сильно связный разреженный орграф с 762 дугами (максимальное расстояние между вершинами $d=4$).

Наконец, дугам полученного невзвешенного социального графа были назначены веса, являющиеся случайными числами, распределенными в соответствии с бета-распределением, определяемым функцией плотности распределения:

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}, x\in(0,1).$$

Здесь $\alpha,\beta>0$ – параметры бета-распределения. Для получения весов использовались значения параметров $\alpha=\beta=4$. При этом больший вес дуги соответствует большему значению заинтересованности. Полученный в итоге взвешенный социальный граф также использовался для сравнения методов определения ключевых игроков социальной сети.

Следует отметить, что РКУ позволяет учитывать наличие петель в графе. Впрочем, при условии, что вес всех петель одинаков ($w_{ii}=w_{jj}$), их присутствие не влияет на результат ранжирования. В случае, когда РКУ используется для ранжирования игроков в круговом турнире, петля для *i*-й вершины может иметь смысл ничьей в виртуальной игре *i*-го игрока с самим собой. Однако для социального графа наличие петли w_{ii} будет означать, что *i*-й пользователь социальной сети оказал влияние на свое же мнение, реагируя на свои собственные сообщения. В силу абсурдности данного допущения при получении случайного графа для проведения эксперимента наличие петель не предусматривалось.

Для проведения эксперимента в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2015 на языке C# с использованием технологии ASP.NET было создано веб-приложение, позволяющее генерировать случайные графы, в том числе ориентированные и взвешенные, а также реализованы алгоритмы исследуемых методов определения ключевых игроков социальной сети. При этом для реализации процедуры РКУ использовался пакет Accord.NET, представляющий платформу машинного обучения и содержащий в своем составе оптимизированную реализацию алгоритмов поиска собственных значений и векторов матриц. С учетом этого алгоритм РКУ заключается в выполнении нескольких простых шагов [9, 10, 16]:

1. Для матрицы весов $\mathbf{W}$ размера $n\times n$ определить вектор $\mathbf{VL}$ собственных значений

$$\mathbf{VL}\leftarrow \mathrm{eigenvalue}(\mathbf{W}).$$

2. Найти максимальное по модулю собственное значение $V_{\max}$

$$V_{\max}\leftarrow \max(|\mathbf{VL}_i|),\ i\in 1...n.$$

3. Найти собственный вектор $\mathbf{VC}$ матрицы $\mathbf{W}$, соответствующий собственному значению $V_{\max}$:

$$\mathbf{VC} \leftarrow \text{eigenvector}(\mathbf{W}, V_{\max}).$$

4. Найти сумму VC_{sum} элементов собственного вектора $\mathbf{VC}$

$$VC_{\text{sum}} \leftarrow \sum \mathbf{VC}_i, \quad i \in 1...n.$$

5. Провести нормализацию вектора $\mathbf{VC}$ для определения вектора $\boldsymbol{\sigma}$ относительных сил вершин графа

$$\boldsymbol{\sigma} \leftarrow \frac{\mathbf{VC}}{VC_{\text{sum}}}.$$

Вершины v_i графа затем ранжируются в соответствии со значениями σ_i.

Анализ результатов эксперимента

Вершины трех полученных графов были проранжированы по убыванию их важности (силы) с использованием метода расчета информационной энтропии (IE), показателя Боргатти (BG) и процедуры РКУ (KW). Результаты эксперимента отражены в табл. 1–3, в которых указаны номера вершин, занявших при ранжировании места с 1-го по 10-е в соответствии с численными значениями показателей (*VIE*, *VBG* и *VKW* соответственно). Отметим, что показатель *VKW* выражен в процентах для удобства отображения.

Из табл. 1 видно, что все три метода одинаково определили четыре наиболее влиятельные вершины турнира. Мы можем оценить этот результат с вероятностной точки зрения: вероятность того, что процедура РКУ случайно указала те же семь вершин (и в том же порядке), в качестве наиболее влиятельных, что и, к примеру, метод Боргатти, обратно пропорциональна числу размещений из 100 по 7:

$$p = \frac{1}{C_{100}^{7} \cdot 7!} \approx 10^{-14},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Таблица 1

Ранжирование вершин турнира

Место	Результаты ранжирования вершин					
	Метод IE		Метод BG		Метод KW	
	№	*VIE*	№	*VBG*	№	*VKW*
1	34	1,237	34	82	34	1,317
2	53	1,222	53	81,5	53	1,295
3	71	1,148	71	79	71	1,192
4	49	1,133	49	78,5	49	1,177
5	85	1,133	85	78,5	85	1,162
6	68	1,133	68	78,5	68	1,153
7	69	1,118	69	78	69	1,149
8	50	1,118	50	78	9	1,148
9	43	1,118	43	78	43	1,144
10	9	1,102	9	77,5	50	1,142

Также результаты табл. 1 позволяют сделать вывод о том, что все три метода одинаково указали неупорядоченное подмножество из 10 наиболее влиятельных вершин. Вероятность того, что два метода случайно определят одно и то же подмножество из 10 вершин, обратно пропорциональна числу сочетаний из 100 по 10:

$$p = \frac{1}{C_{100}^{10}} \approx 6 \cdot 10^{-14}.$$

Полученные значения вероятностей позволяют утверждать о почти полном соответствии результатов работы исследуемых методов при решении задачи определения группы наиболее влиятельных игроков невзвешенного кругового турнира.

В табл. 2 приведены значения показателей *VIE*, *VBG* и *VKW* 10 наиболее влиятельных вершин невзвешенного социального графа, определенных соответствующими методами.

Из табл. 2 видно, что метод информационной энтропии и РКУ одинаково определили 8 из 10 наиболее влиятельных вершин графа без учета их относительной силы. Вероятность получить такой результат случайно определяется отношением числа всевозможных комбинаций по 10 элементов, 8 из которых принадлежат группе из 10 наиболее влиятельных вершин, к общему числу сочетаний из 100 по 10:

$$p = \frac{C_{10}^{8} C_{90}^{2}}{C_{100}^{10}} \approx 10^{-8}.$$

При сравнении метода Боргатти и РКУ оба метода определили 9 из 10 наиболее влиятельных вершин графа без учета их относительной силы. Вероятность получить такой результат случайно определяется аналогично предыдущему случаю:

$$p = \frac{C_{10}^{9} C_{90}^{1}}{C_{100}^{10}} \approx 5 \cdot 10^{-11}.$$

Таблица 2

Ранжирование вершин невзвешенного графа

Место	Результаты ранжирования вершин					
	Метод IE		Метод BG		Метод KW	
	№	*VIE*	№	*VBG*	№	*VKW*
1	64	1,699	64	52,833	64	1,953
2	68	1,613	28	52	68	1,796
3	97	1,613	68	51,333	28	1,757
4	28	1,526	97	51,25	97	1,709
5	41	1,526	72	50,667	72	1,673
6	33	1,436	41	50,667	33	1,602
7	72	1,436	33	50	41	1,592
8	2	1,436	2	50	71	1,535
9	92	1,436	71	49,667	82	1,483
10	7	1,344	92	49,5	2	1,478

Данный результат позволяет утверждать, что для случая невзвешенного разреженного орграфа группы наиболее влиятельных пользователей социальной сети, определенные разными методами, различаются незначительно.

Таблица 3

Ранжирование вершин взвешенного графа

Место	Результаты ранжирования вершин					
	Метод IE		Метод BG		Метод KW	
	№	*VIE*	№	*VBG*	№	*VKW*
1	64	1,702	64	28,948	64	2,059
2	97	1,671	72	28,874	72	1,889
3	41	1,623	93	28,373	28	1,887
4	68	1,595	28	28,359	33	1,755
5	28	1,549	41	28,031	68	1,740
6	92	1,543	92	27,844	93	1,703
7	33	1,533	33	27,743	97	1,669
8	72	1,526	68	27,557	41	1,657
9	2	1,52	97	27,415	92	1,604
10	25	1,37	21	27,076	2	1,509

В табл. 3 приведены значения показателей *VIE*, *VBG* и *VKW* 10 наиболее влиятельных вершин взвешенного социального графа, определенных соответствующими методами. Из табл. 3 видно, что процедура РКУ определила 9 из 10 наиболее влиятельных вершин социального графа, также попавших в группы из 10 влиятельных вершин, полученные методом информационной энтропии и методом Боргатти. Как было указано выше, вероятность случайного совпадения при этом приблизительно равна $5 \cdot 10^{-11}$. Это позволяет утверждать, что использование взвешенного графа не приводит к значительным различиям в результатах определения группы наиболее влиятельных пользователей социальной сети, полученных разными методами.

Заключение

Анализ результатов проведенных модельных экспериментов не вызывает сомнений в возможности применения процедуры РКУ для решения задачи определения пользователей социальных сетей, являющихся лидерами общественного мнения или рассматриваемых в качестве экспертов по заданной тематике. Несомненным достоинством данного метода является простота программной реализации алгоритма ранжирования в сравнении с дистанционными алгоритмами. Кроме этого, зачастую в результате работы методов информационной энтропии и Боргатти нескольким вершинам графа соответствует одинаковое значение численных показателей (VIE и VBG соответственно); для процедуры РКУ такая ситуация возникает значительно реже. Можно говорить о том, что РКУ лучше дистанционных методов дифференцирует вершины графа по их относительной силе.

Использование ранжирования Кендала–Уэя в совокупности с другими методами решения задачи идентификации ключевых игроков социального графа позволяет повысить эффективность выявления влиятельных пользователей социальных сетей и уточнить представления о структуре социальных связей между пользователями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-07-00034 А).

Литература

1. Dalal M.K. Opinion Mining from Online User Reviews Using Fuzzy Linguistic Hedges / M.K. Dalal, M.A. Zaveri // Applied Computational Intelligence and Soft Computing. – 2014. – Vol. 2014. – Art. No. 735942. – 9 p.

2. Bollen J. Twitter mood predicts the stock market / J. Bollen, H. Mao, X.-J. Zeng // Journal of Computational Science. – 2011. – vol. 2(1). – P. 1–8

3. Ortiz-Arroyo D. Discovering Sets of Key Players in Social Networks / D. Ortiz-Arroyo // Computational Social Networks Analysis/ ed. by A. Abraham, A.E. Hassanien, V. Snášel. – London: Springer-Verlag London Ltd., 2010. – P. 27–47.

4. Diestel R. Graph Theory / R. Diestel. – 2nd edition. – New York: Springer-Verlag, 2000. – 312 p.

5. Bondy J.A. Graph Theory with Applications / J.A. Bondy, U.S.R. Murty. – North-Holland, 1982. – 271 p.

6. Huang B. The Finding and Dynamic Detection of Opinion Leaders in Social Network / B. Huang, G. Yu, H.R. Karimi // Mathematical Problems in Engineering. – 2014. – Vol. 2014. – Art. No. 328407. – 7 p.

7. Shetty J. Discovering important nodes through graph entropy the case of Enron email database / J. Shetty, J. Adibi // 3rd International Workshop on Link Discovery. – 2015. – P. 74–81.

8. Borgatti S.P. Identifying sets of key players in a social network / S.P. Borgatti // Computational & Mathematical Organization Theory. – 2006. – Vol. 12, № 1. – P. 21–34.

9. Keener J.P. The Perron–Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams / J.P. Keener // SIAM Review. – 1993. – Vol. 35(1). – P. 80–93.

10. Burk Jr. J.L. Eigenspaces of Tournament Matrices: PhD Thesis. – Washington State University, 2012. – 91 p.

11. Boldi P. Axioms for Centrality / P. Boldi, S. Vigna // Internet Mathematics. – 2014. – Vol. 10, Iss. 3-4. – P. 222–262.

12. Handbook of Graph Theory / ed. by J.L. Gross, J. Yellen, P. Zhang. – 2nd edition. – Boca Raton: CRC Press, 2014. – 1610 p.

13. Ray S.S. Graph Theory with Algorithms and its Applications: in Applied Science and Technology. – New Dehli: Springer India, 2013. – 214 p.

14. Свами М. Графы, сети и алгоритмы: пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

15. Татт У. Теория графов: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 424 с.

16. Берж К. Теория графов и ее применение: пер. с франц. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1962. – 320 с.

17. Харари Ф. Теория графов: пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

18. Topics in Chromatic Graph Theory / edited by L.W. Beineke, R.J. Wilson. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2015. – 370 p.

19. Cvetković D. Eigenspaces of Graphs / D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997. – 258 p.

20. Лапенок М.В. Идентификация пользователя в различных социальных сетях посредством анализа социальных связей пользователя и атрибутов профиля / М.В. Лапенок, О.М. Патрушева // Образовательные технологии и общество. – 2016. – № 3. – С. 584–594.

21. Kadushin C. Understanding Social Networks: Theories, Concepts, and Findings / C. Kadushin. – New York: Oxford University Press, 2012. – 264 p.

22. Veremyev A. Critical nodes for distance-based connectivity and related problems in graphs / A. Veremeyev,

O. Prokopyev, E. Pasiliao // Networks. – 2015. – Vol. 66(3). – P. 170–195.

23. Сравнение способов идентификации пользователей социальных сетей, являющихся экспертами в заданной предметной области / Е.Е. Лунева, А.А. Ефремов, Е.А. Кочегурова, П.И. Банокин, В.С. Замятина // Системы управления и информационные технологии. – 2017. – № 4(70). – С. 63–68.

Ефремов Александр Александрович
Ассистент каф. автоматики и компьютерных систем (АиКС) Национального исследовательского Томского политехнического университета (НИ ТПУ)
Ленина пр-т, д. 2, г. Томск, Россия, 634050
ORCID 0000-0001-8149-3641
Тел.: +7 (382-2) 60-63-86
Эл. почта: alexyefremov@tpu.ru

Лунева Елена Евгеньевна
Доцент каф. АиКС НИ ТПУ
Ленина пр-т, д. 2, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 60-63-86
Эл. почта: lee@tpu.ru

Банокин Павел Иванович
Ассистент каф. АиКС НИ ТПУ
Ленина пр-т, д. 2, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 60-63-86
Эл. почта: banokin@tpu.ru

Кочегурова Елена Алексеевна
Доцент каф. АиКС НИ ТПУ
Ленина пр-т, д. 2, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 60-63-86
Эл. почта: kocheg@tpu.ru

Yefremov A.A., Luneva E.E.,
Banokin P.I., Kochegurova E.A.

Identification of key players of social graph with Kendall–Wei ranking

The paper considers feasibility of Kendall-Wei ranking application to identify the subset of social network users, referred as subject matter experts. Authors have performed the comparison of the procedure under consideration with widely known distance based methods, such as information entropy assessment and Borgatti centrality measure. Based on analysis of model experiment results, authors claim that Kendall–Wei ranking matches existing methods in problem-solving capability, while having simpler software implementation.

Keywords: social graph, key players, distance-based methods, oriented graph, ranking.
doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-1-80-85

References

1. Dalal M.K., Zaveri M.A. Opinion Mining from Online User Reviews Using Fuzzy Linguistic Hedges. *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, 2014, vol. 2014, art. no. 735942, pp. 1–9.

2. Bollen J., Mao H., Zeng X.-J. Twitter mood predicts the stock market. *Journal of Computational Science*, 2011, vol. 2(1), pp. 1–8.

3. Ortiz-Arroyo D. Discovering Sets of Key Players in Social Networks. In *Computational Social Networks Analysis*, London, Springer-Verlag London Ltd., 2010, pp. 27–47.

4. Diestel R. *Graph Theory*. New York, Springer-Verlag, 2000. 312 p.

5. Bondy J.A., Murty U.S.R. *Graph Theory with Applications*. New York, North-Holland, 1982. 271 p.

6. Huang B., Yu G., Karimi H.R. The Finding and Dynamic Detection of Opinion Leaders in Social Network. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, art. no. 328407, pp. 1–7.

7. Shetty J., Adibi J. Discovering important nodes through graph entropy the case of Enron email database. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Link Discovery*, 2005, pp. 74–81.

8. Borgatti S.P. Identifying sets of key players in a social network. *Computational & Mathematical Organization Theory*, 2006, vol. 12, № 1, pp. 21–34.

9. Keener J.P. The Perron – Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams. *SIAM Review*, 1993, vol. 35(1), pp. 80–93.

10. Burk Jr. J.L. *Eigenspaces of Tournament Matrices*, PhD Thesis. Washington State University, 2012. 91 p.

11. Boldi P., Vigna S. Axioms for Centrality. *Internet Mathematics*, 2014, vol. 10, iss. 3–4, pp. 222–262.

12. Gross J.L., Yellen J., Zhang P. *Handbook of Graph Theory.* Boca Raton, CRC Press, 2014. 1610 p.

13. Ray S.S. *Graph Theory with Algorithms and its Applications in Applied Science and Technology*. New Dehli, Springer India, 2013. 232 p.

14. Svami M., Thulasiraman K. *Graphs, Networks and Algorithms*. Monreal, Wiley, 1984. 455 p.

15. Tatt W. *Teoria graphov* [Graph theory]. Moscow, Mir, 1988. 424 p. (In Russ.)

16. Berge C. *Teoria graphov i ee primenenie* [The Graph Theory and its Applications]. Moscow, Foreign Literature Publishing House, 1962. 320 p. (in Rus.).

17. Kharari F. *Teoriya grafov* [The Graph Theory]. Moscow, Yeditorial URSS, 2003. 296 p. (In Russ.)

18. Beineke L.W., Wilson R.J. *Topics in Chromatic Graph Theory*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2015. 370 p.

19. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. *Eigenspaces of Graphs*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1997. 258 p.

20. Lapenok M.V., Patrusheva O.M. Identifikaciya polzovatelya v razlichnyh socialnyh setyah po sredstvam analiza socialnyh svyazej polzovate-lya i atributov profilya [Identification of the user in various social networks by means of analysis of user social relationships and profile attributes], *Educational technologies and society*, 2016, № 3, pp. 584–594. (In Russ.)

21. Kadushin C. *Understanding Social Networks: Theories, Concepts, and Findings*. New York, Oxford University Press, 2012. 264 p.

22. Veremyev A., Prokopyev O., Pasiliao E. Critical nodes for distance-based connectivity and related problems in graphs. *Networks*, 2015, vol. 66(3), pp. 170–195.

23. Luneva E.E., Yefremov A.A., Kochegurova E.A., Banokin P.I., Zamyatina V.S. The comparison of identification methods of social network users regarded as subject-matter experts. *Control Systems and Information Technology*, 2017, № 4(70), pp. 63–68. (In Russ.)

Alexander A. Yefremov
PhD student, Assistant Professor, Department of Automatics and Computer Systems, National Research Tomsk Polytechnic University
2, Lenin Av., Tomsk, Russia, 634050
ORCID 0000-0001-8149-3641
Phone: +7 (382-2) 60-63-86
Email: alexyefremov@tpu.ru

Elena E. Luneva
PhD of Engineering Science, Associate Professor, Department of Automatics and Computer Systems, National Research Tomsk Polytechnic University
2, Lenin Av., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 60-63-86
Email: lee@tpu.ru

Pavel I. Banokin
PhD student, Assistant Professor, Department of Automatics and Computer Systems, National Research Tomsk Polytechnic University
2, Lenin Av., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 60-63-86
Email: banokin@tpu.ru

Elena A. Kochegurova
PhD of Engineering Science, Associate Professor, Department of Automatics and Computer Systems, National Research Tomsk Polytechnic University
2, Lenin Av., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 60-63-86
Email: kocheg@tpu.ru